

ONDAS VIAJERAS PERIÓDICAS PARA UN SISTEMA BENJAMIN-ONO REGULARIZADO

FELIPE ALEXANDER PIPICANO GUZMÁN

**Trabajo de grado presentado como requisito parcial
para optar al título de Magíster en Ciencias Matemáticas**

**Juan Carlos Muñoz Grajales, Ph. D.
Director**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2016**

ONDAS VIAJERAS PERIÓDICAS PARA UN SISTEMA BENJAMIN-ONO REGULARIZADO

FELIPE ALEXANDER PIPICANO GUZMÁN

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2016**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

FELIPE ALEXANDER PIPICANO GUZMÁN

**ONDAS VIAJERAS PERIÓDICAS PARA UN SISTEMA BENJAMIN-ONO
REGULARIZADO**

Temas relacionados:

- Grado topológico e índice de punto fijo.
- Soluciones tipo ondas viajeras periódicas.
- Esquema pseudoespectral.

*A mi querida madre Cecilia del Socorro Guzmán
a mi querido padre Felix María Pipicano
y a mi amada esposa Mariela Muñoz.*

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradezco infinitamente y con intenso cariño a mi familia. Especialmente a mis padres y esposa por su atento e incondicional apoyo y valiosa ayuda en todos mis proyectos.

Agradezco de manera especial al Dr. Juan Carlos Muñoz Grajales, docente de la Universidad del Valle y asesor de este trabajo de investigación, por su paciencia, motivación, orientación y tiempo dedicado. A la Universidad del Valle por brindarme la posibilidad de continuar mis estudios superiores y financiar esta maestría mediante su programa de asistencias de docencia. A todos los profesores del departamento de matemáticas quienes contribuyeron en mi formación académica y profesional.

Gratitud y cariño a mis compañeros del posgrado por ofrecerme su compañía, aliento, apoyo y amistad, haciendo más amena mi estancia en la Universidad.

Índice general

Resumen	VII
Introducción	VIII
1. Generalidades	1
1.1. Definiciones y notaciones	1
1.2. Introducción a la teoría del Grado Topológico	5
1.2.1. Grado de Brouwer	8
1.2.2. Índice de punto fijo de Leray-Schauder	16
1.2.3. Índice de punto fijo para ternas admisibles	20
2. Existencia de soluciones tipo ondas viajeras periódicas	22
2.1. Planteamiento del problema	23
2.2. Resultados principales	27
3. Aproximación de soluciones tipo ondas viajeras periódicas	39
3.1. Descripción de los experimentos numéricos	40
Conclusiones	46
Bibliografía	47

Resumen

En este trabajo de grado, consideramos un sistema integro-diferencial de ecuaciones en derivadas parciales tipo Benjamin-Ono regularizado. Nuestro objetivo principal es establecer, bajo ciertas condiciones, la existencia de soluciones tipo ondas viajeras periódicas. Para ello, reescribimos el problema como uno de punto fijo para un operador apropiado y empleamos la teoría del grado topológico para operadores positivos en espacios de Banach. Además, empleamos un esquema pseudoespectral de alta precisión basado en una descomposición de Fourier para construir aproximaciones numéricas de estas soluciones estacionarias.

Introducción

Recientemente J.C. Muñoz [18] dedujo el siguiente sistema integro-diferencial de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\zeta_t - ((1 - \alpha\zeta)u)_x &= \frac{\epsilon^2}{6}\zeta_{xxt} \\ u_t + \alpha uu_x + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\zeta_x &= \frac{\rho_2}{\rho_1}\epsilon\mathcal{H}(u_{xt}) + \frac{\epsilon^2}{6}u_{xxt},\end{aligned}\tag{1}$$

bajo las condiciones iniciales $\zeta(x, 0) = \zeta_0(x)$ y $u(x, 0) = u_0(x)$. El operador \mathcal{H} representa la transformada de Hilbert, la cual se puede definir vía transformada de Fourier por:

$$\widehat{\mathcal{H}(v)}(\xi) = i \operatorname{sgn}(\xi)\widehat{v}(\xi).$$

El sistema (1) describe la propagación de una onda interna débilmente no-lineal, a través de la interfase de dos fluidos inmiscibles con densidades constantes; tales fluidos se encuentran en reposo y están contenidos en un canal largo, de base y cubierta rígidas y planas. Las constantes ρ_1 y ρ_2 en (1), representan la densidad de los líquidos y éstas cumplen que $\rho_2 > \rho_1$. Las constantes α y ϵ son reales positivos pequeños (tal que $\alpha = O(\epsilon^2)$) definidos por $\alpha = \frac{a}{h_1}$

y $\epsilon = \frac{h_1}{L}$, donde α mide los efectos de la no linealidad y ϵ los efectos de la dispersión. Los parámetros L y a corresponden, respectivamente, a la longitud y a la amplitud de onda características. La variable h_1 denota el espesor de la capa de fluido superior, la variable x representa la posición y t el tiempo. La función $u = u(x, t)$ representa la velocidad en la profundidad normalizada $z = 1 - \sqrt{2/3}$ y $\zeta = \zeta(x, t)$ es la amplitud de onda en la posición x con tiempo t , medida con respecto a la interfase no perturbada de los líquidos.

En [18] se estableció la existencia y unicidad de soluciones del sistema (1) en el caso no periódico y se analizó la convergencia de un esquema espectral con el fin de aproximar su solución para datos iniciales dados. De esta manera, para continuar el estudio de este sistema, resulta relevante abordar el problema de las condiciones que garantizan la existencia de un tipo especial de soluciones que surgen, en algunas ecuaciones, cuando se presenta un balance entre la no linealidad y los efectos dispersivos; estas soluciones son llamadas ondas viajeras y se caracterizan por moverse con velocidad constante, sin ninguna evolución temporal en su forma o tamaño cuando el marco de referencia con el que se observa, se mueve con la misma velocidad de la onda. El sistema (1) tiene soluciones del tipo ondas viajeras periódicas si

existen funciones u y ζ de la forma

$$u(x, t) = u_c(x - ct) \quad \text{y} \quad \zeta(x, t) = \zeta_c(x - ct),$$

donde u_c y ζ_c son funciones periódicas, que lo satisfacen para una velocidad constante c y un periodo $2l$ apropiados (ver: Figura 1).

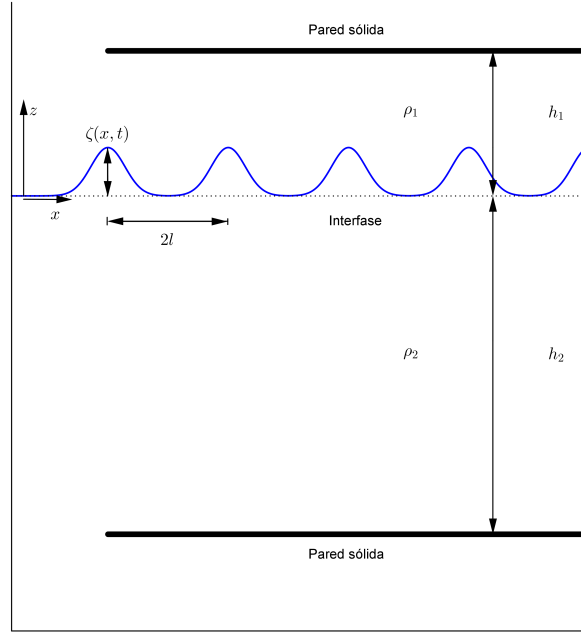


Figura 1: Una típica onda viajera periódica propagándose a través de la interfase de dos fluidos contenidos en una región limitada por paredes horizontales. La línea punteada indica el nivel de reposo de los fluidos.

En las últimas décadas, el estudio de las ondas viajeras ha tenido gran auge debido a que se encuentran en diversos campos de aplicación, tales como: Mecánica de Fluidos, Óptica, Acústica, Oceanografía, Astronomía, etc. Las investigaciones han demostrado que hay ondas viajeras en medios líquidos, sólidos, gaseosos, e incluso en la corriente eléctrica, campos electromagnéticos, atmósferas de planetas, cristales, plasmas, fibras de vidrio y redes nerviosas. Más aún, las ondas viajeras pueden formarse en la interfase entre dos capas de fluidos inmiscibles de diferentes densidades, lo cual es el fenómeno de interés en el presente documento. Algunas ecuaciones diferenciales clásicas que poseen soluciones del tipo ondas viajeras son:

- La ecuación Korteweg de-Vries (KdV) [8]: $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$.
- La ecuación Benjamin-Bona-Mahony (BBM) [20]: $u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$.
- La ecuación Benney-Luke [7]: $u_{tt} - k^2 u_{xx} + au_{xxx} + bu_{xxtt} + cu_t u_{xx} + du_x u_{xt} = 0$.

- La ecuación Benjamin-Ono [1]: $u_t + u_x + uu_x + \mathcal{H}(u_{xx}) = 0$.
- La ecuación Benjamin-Ono Regularizada (rBO) [4] : $u_t + u_x + uu_x - \mathcal{H}(u_{xt}) = 0$.

Hasta donde se tiene conocimiento, no existe en la literatura un estudio analítico acerca de la existencia de soluciones tipo ondas viajeras para el sistema (1). Por lo tanto, nuestro principal objetivo es establecer el siguiente resultado:

Teorema 0.0.1 *Si $|c| > \sqrt{\rho}$, donde $\rho = \rho_2/\rho_1 - 1$ y el semiperiodo $l > 0$ es suficientemente grande, entonces el sistema (1) tiene al menos una solución tipo onda viajera periódica no trivial.*

El segundo objetivo de este trabajo es la construcción de aproximaciones a las soluciones del tipo ondas viajeras periódicas pares del sistema (1), cuya existencia está garantizada por los resultados teóricos. Para esto, adaptamos las ideas expuestas en [17], en el que se usa un esquema numérico que cuenta con un método pseudo-espectral apoyado en una base de Fourier, para aproximar la estructura espacial y en el método de Newton, el cual es usado para resolver el sistema no lineal de ecuaciones que con ella se genera.

Es importante anotar que los resultados expuestos aquí fueron publicados en [19] y que las técnicas matemáticas que empleamos en la exploración de la existencia de ondas viajeras periódicas del sistema (1), son motivadas originalmente por Bona et al. [2], quienes presentan un método general para el tratamiento de problemas analíticos que tienen soluciones del tipo ondas solitarias para algunas ecuaciones dispersivas, H. Chen en [4] desarrolló el principal avance en la aplicación del método expuesto en [2] a ecuaciones dispersivas en un dominio periódico y por J.C. Muñoz quien en [17] estableció la existencia de soluciones del tipo onda viajera periódica para un sistema Boussinesq generalizado. Cabe notar, que esta aproximación topológica es libre de restricciones en la amplitud de onda (controlada en este caso por el parámetro α) y depende sólo de los parámetros que aparecen en los términos lineales dispersivos del sistema (1).

Para llevar a cabo el desarrollo de este trabajo, hemos distribuido su contenido en tres capítulos. En el capítulo 1 presentamos las definiciones, notaciones, resultados y observaciones necesarias para las secciones posteriores, además de una introducción a la teoría del grado topológico. En el capítulo 2, establecemos la existencia de una familia de soluciones del tipo ondas viajeras periódicas del sistema (1), parametrizada por la velocidad de onda c siempre que el periodo $2l$ sea suficientemente grande. En el capítulo 3, introducimos el esquema numérico empleado para aproximar las soluciones tipo ondas viajeras periódicas del sistema (1) e ilustramos los resultados teóricos. Finalizamos con las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1

Generalidades

1.1. Definiciones y notaciones

Inicialmente, mostramos las definiciones y notaciones estándares que presuponemos en el desarrollo de este documento. En adelante, \mathbb{N} denota el conjunto de los números naturales, \mathbb{Z} los enteros, \mathbb{R} el campo de los números reales y \mathbb{C} el de los números complejos. \mathbb{R}^n denota el espacio de todos los vectores n -dimensionales y por razones tipográficas, estos vectores se escriben de manera indistinta como vectores fila o columna. La norma euclidiana para \mathbb{R}^n se denota por $\|\cdot\|$.

Consideremos E un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_E$, $\Omega \subset E$, $x \in E$ y $r > 0$. El símbolo $B_r(x)$ denota la bola abierta centrada en x de radio r en E , esto es,

$$B_r(x) := \{ y \in E : \|x - y\|_E < r \}.$$

La distancia del punto x a Ω se define por

$$\varrho(x, \Omega) := \inf_{y \in \Omega} \|x - y\|_E.$$

Los símbolos $\partial\Omega$ y $\overline{\Omega}$ denotan la frontera y adherencia de Ω , respectivamente. Ω se define compacto si para todo recubrimiento abierto de Ω , se puede extraer un subrecubrimiento abierto finito y se dice relativamente compacto, si $\overline{\Omega}$ es compacto. Es importante anotar que en espacios de Banach de dimensión finita, un conjunto es compacto si y solamente si, es cerrado y acotado. Esta equivalencia no se cumple en general para espacios de Banach de dimensión infinita. El conjunto Ω se define convexo si para todo $x, y \in \Omega$, el segmento de recta que une a x y y está contenido en Ω y la notación $\text{span } \Omega$ se refiere al conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de Ω .

Denotamos por $\mathcal{M}_{n \times n}$ el espacio de todas las matrices reales de tamaño $n \times n$. Una norma usual definida en este espacio es la dada por la expresión:

$$\|D(i, j)\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |D(i, j)|,$$

donde $D(i, j)$ denota el elemento en la posición (i, j) de la matriz $D \in \mathcal{M}_{n \times n}$.

Dados Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $k \in \mathbb{N}$ y una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que f es de clase C^k o que está en $C^k(\Omega)$, si es k veces continuamente diferenciable en Ω . Escribimos $f \in C(\Omega)$, si f es continua en Ω . f es de clase C^∞ o $f \in C^\infty(\Omega)$, si $f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$. De igual manera, $f \in C^k(\overline{\Omega})$ si

$$f \in C^k(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Además, si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real con un dominio arbitrario X , el soporte de f , denotado por $\text{supp } f$, se define por

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

La función $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ se define por

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Para $1 \leq p < \infty$, l_p denota el espacio de todas las sucesiones complejas p -sumables, esto es

$$l_p := \left\{ u = (u_n)_{n=-\infty}^{\infty} : u_n \in \mathbb{C}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^p < \infty \right\}.$$

Una norma usual definida en l_p está dada por la siguiente expresión:

$$\|u\|_p := \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^p \right)^{1/p}.$$

Similarmente, para $p = \infty$, el espacio l_∞ se define por

$$l_\infty := \{ u = (u_n)_{n=-\infty}^{\infty} : u_n \in \mathbb{C}, \sup_{n \in \mathbb{Z}} |u_n| < \infty \}$$

con la norma

$$\|u\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|,$$

ambos espacios de Banach.

Para $1 \leq p < q < \infty$, $l_p \subset l_q$, y para toda sucesión $u = (u_n)_n \in l_p$, es válida la desigualdad

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p.$$

Si $1 \leq p, q \leq \infty$ son tales que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ y si $u \in l_p$ y $v \in l_q$ son sucesiones, entonces

$$w = (w_n)_n = u * v \in l_\infty,$$

donde $w_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k v_{n-k}$, y

$$\|w\|_\infty \leq \|u\|_p \|v\|_q. \quad (1.1)$$

Si $1 \leq p \leq \infty$ y $u, v \in l_p$, también es válida la desigualdad

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p. \quad (1.2)$$

Para $p \geq 1$, $L_p(-l, l)$ representa el espacio de todas las funciones Lebesgue-medibles sobre \mathbb{R} las cuales son $2l$ -periódicas y p -integrables en $[-l, l]$. La norma usual definida en $L_p(-l, l)$ es

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_p := \left(\int_{-l}^l |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

De igual manera, para $p = \infty$, $L_\infty(-l, l)$ es el espacio de Banach de todas las funciones medibles, $2l$ -periódicas y esencialmente acotadas con la norma usual

$$\|f\|_{L_\infty} = \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in [-l, l]} |f(x)| := \inf \{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\}.$$

Aquí μ_n designa la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R}^n .

Adicionalmente, toda sucesión $u = (u_n)_n \in l_2$ define una función $2l$ -periódica f donde

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{\frac{in\pi}{l}x}. \quad (1.3)$$

De igual manera, si $f \in L_p(-l, l)$, entonces f puede ser representada como una serie de la forma (1.3), donde

$$u_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{in\pi}{l}x} dx. \quad (1.4)$$

En este sentido, toda función $f \in L_p(-l, l)$ es identificada con la sucesión de sus coeficientes de Fourier $f = (f_n)_n$ donde f_n es definido como en (1.4). Para un estudio detallado acerca del Análisis de Fourier se recomienda al lector remitirse a texto de R. Iorio [11].

Definición 1.1.1 La transformada de Hilbert de una función $f(x)$, denotada por $\mathcal{H}(f)$, se define para todo $x \in \mathbb{R}$ por la integral:

$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - x} d\tau,$$

siempre que ésta exista. La expresión $p.v. \int$ indica que la integral es en el sentido del valor principal.

Normalmente no es posible calcular la transformada de Hilbert como una integral impropia ordinaria debido al polo en $x = \tau$. Sin embargo, el tomar la integral en el sentido del valor principal incrementa la clase de funciones para las cuales la integral de la Definición 1.1.1 existe.

La linealidad de la transformada de Hilbert es una consecuencia directa de la Definición 1.1.1. Un cálculo directo permite establecer que para $w \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(wx)$ y $\tau_w(f)(x) = f(x - w)$, se tiene que

$$\mathcal{H}(g)(x) = \text{sign}(w)\mathcal{H}(f)(wx) \quad \text{y} \quad \mathcal{H}(\tau_w(f))(x) = \tau_w(\mathcal{H}(f))(x).$$

Esta última igualdad muestra que la transformada de Hilbert y las traslaciones conmutan.

Ejemplo. Dada la función $f(x) = \sin(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f)(x) &= \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\tau)}{\tau - x} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\tau + x)}{\tau} d\tau \\ &= \frac{\cos(x)}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau + \frac{\sin(x)}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\tau)}{\tau} d\tau \\ &= \cos(x), \end{aligned}$$

debido a que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau = \pi$ y la expresión $\frac{\cos(\tau)}{\tau}$ es impar. Usando la conmutatividad entre la transformada de Hilbert y las traslaciones, podemos deducir que

$$\mathcal{H}(\cos(x)) = \mathcal{H}(\sin(x + \pi/2)) = \cos(x + \pi/2) = -\sin(x).$$

Por otra parte, si $f(x) = e^{iwx}$, donde $w \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{H}(e^{iwx})(x) = i \text{sign}(w)e^{iwx}. \quad (1.5)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f)(x) &= \mathcal{H}(e^{iwx})(x) \\ &= \mathcal{H}(\cos(wx) + i \sin(wx))(x) \\ &= \mathcal{H}(\cos(wx))(x) + i \mathcal{H}(\sin(wx))(x) \\ &= -\text{sign}(w) \sin(wx) + i \text{sign}(w) \cos(wx) \\ &= i \text{sign}(w)(\cos(wx) + i \sin(wx)) \\ &= i \text{sign}(w)e^{iwx}. \end{aligned}$$

Ejemplo. La transformada de Hilbert de la derivada de una función es la derivada de la transformada de Hilbert; esto es,

$$\mathcal{H}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d}{dx}\mathcal{H}(f)(x). \quad (1.6)$$

Para ver esto, recordemos la regla para integrales de Leibniz, la cual establece que:

$$\frac{d}{dc} \int_{a(c)}^{b(c)} f(y, c) dy = \int_{a(c)}^{b(c)} \frac{\partial}{\partial c} f(y, c) dy + f(b, c) \frac{d}{dc} b(c) - f(a, c) \frac{d}{dc} a(c).$$

En particular, si a y b son límites definidos (independientes de c), obtenemos

$$\frac{d}{dc} \int_a^b f(y, c) dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial c} f(y, c) dy.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathcal{H}(f)(x) &= \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - x} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x + \tau)}{\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'(x + \tau)}{\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'(\tau)}{\tau - x} d\tau \\ &= \mathcal{H}(f')(x). \end{aligned}$$

donde $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$.

Por último, la transformada de Hilbert se puede definir vía transformada de Fourier por:

$$\widehat{\mathcal{H}(f)}(x) = i \operatorname{sign}(x) \widehat{f}(x).$$

Para un estudio más detallado acerca de la transformada de Hilbert se recomienda al lector remitirse al texto escrito por J. Duoandikoetxea [12].

1.2. Introducción a la teoría del Grado Topológico

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua e $y \in \mathbb{R}^n$. Consideremos la ecuación

$$f(x) = y, \quad x \in \Omega. \quad (1.7)$$

En algunas ocasiones, es de nuestro interés responder algunas preguntas fundamentales acerca de la ecuación (1.7):

- ¿Tiene solución esta ecuación?
- Si tiene solución, ¿cómo están distribuidas estas en Ω ?

En esta sección, presentamos una herramienta útil al momento de intentar responder las anteriores preguntas; el grado topológico de f respecto a Ω y a un valor $y \in \mathbb{R}^n$.

Para motivar esta teoría, recordemos el concepto de índice de una curva cerrada con respecto a un punto que no se encuentra sobre la curva. Sean $\Gamma \subset \mathbb{C}$ una curva orientada de clase C^1 y $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. El número entero

$$w(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z - a} dz$$

es llamado el índice de Γ respecto a $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ y representa el número total de vueltas que la curva describe alrededor del punto a . Las vueltas realizadas en sentido antihorario cuentan como positivas, mientras que las realizadas en sentido horario cuentan como negativas.

Este tópico básico del Análisis Complejo fue descubierto por Cauchy y Gauss a principios del siglo XIX y tiene las siguientes propiedades fundamentales:

1. w es continuo en (Γ, a) . Es decir, es constante en alguna vecindad de (Γ, a) .
2. $w(\Gamma, \cdot)$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. En particular es cero en la componente no acotada.
3. Si las curvas Γ_0 y Γ_1 son homotópicas en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, entonces $w(\Gamma_0, a) = w(\Gamma_1, a)$.
4. Si Γ^- denota a la curva Γ con dirección contraria, entonces $w(\Gamma^-, a) = -w(\Gamma, a)$.

La propiedad 3. es la más importante de todas, debido a que nos permite, por ejemplo, calcular el índice respecto a una curva complicada por medio de otra más sencilla homotópica a la primera. Más aún, las propiedades 1 y 2 son consecuencias de 3.

Ahora, sean $G \subset \mathbb{C}$ una región simplemente conexa, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, $\Gamma \subset G$ una curva cerrada de clase C^1 tal que $f(z) \neq 0$ sobre Γ . Tenemos que

$$w(f(\Gamma), 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\Gamma)} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_i w(\Gamma, z_i) \alpha_i, \quad (1.8)$$

donde los números z_i son los ceros de f en la región encerrada por Γ y α_i sus multiplicidades correspondientes. Si además suponemos que Γ tiene orientación positiva y no se autointerseca, entonces sabemos por el Teorema de Jordan (ver [6], p. 213) que $w(\Gamma, z_i) = 1$ para todo z_i , y la igualdad (1.8) se transforma en:

$$w(f(\Gamma), 0) = \sum_i \alpha_i.$$

Podemos concluir entonces que la ecuación $f = 0$ tiene al menos $|w(f(\Gamma), 0)|$ soluciones en G . Para una lectura más profunda acerca del índice de una curva respecto a un punto, se recomienda al lector consultar el texto realizado por J.B Conway [6].

Brouwer en 1912 generalizó este concepto para funciones continuas de $\bar{\Omega}$ a \mathbb{R}^n ; tradicionalmente se conoce como grado de Brouwer. En 1935, Leray y Schauder generalizaron el grado de Brouwer para espacios de Banach de dimensión infinita, esto se conoce como el grado de Leray-Schauder. Cabe resaltar, que el grado de Leray-Schauder es una poderosa herramienta para probar resultados de existencia de soluciones para algunas ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Para una información más detallada y profunda de lo escrito en esta sección, se recomienda al lector los libros escritos por K. Deimling [14], E. Zeidler [9] y Y. Cho y Y. Chen [5].

A continuación, es necesario enunciar y establecer algunos resultados importantes para el resto de la sección.

Proposición 1.2.1 Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto compacto y $f \in C(K)$. Entonces, existe una extensión continua de f , es decir, una función $\bar{f} \in C(\mathbb{R}^n)$ tal que $\bar{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in K$.

Demostración. Debido a la compacidad de K , existe un subconjunto a lo sumo numerable $\{k_i : i = 1, 2, \dots\}$ denso en K . Para $x \notin K$ definamos

$$\alpha_i(x) = \max \left\{ 2 - \frac{\|x - k_i\|}{\varrho(x, K)}, 0 \right\}.$$

La función

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K, \\ \left(\sum_{i \geq 1} 2^{-i} \alpha_i(x) \right)^{-1} \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \alpha_i(x) f(k_i), & x \notin K, \end{cases}$$

define una extensión continua de f .

Proposición 1.2.2 Sean $\epsilon > 0$ y $f \in C(\bar{\Omega})$. Entonces existe una función $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} \|f(x) - g(x)\| = \|f - g\|_\infty < \epsilon.$$

Demostración. Para $f \in C(\bar{\Omega})$, sea $\bar{f} \in C(\mathbb{R}^n)$ la extensión continua de f dada por la Proposición 1.2.1. Consideremos la familia de funciones $\phi_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$\phi_\lambda(x) = \begin{cases} c\lambda^{-n} \exp \left(-\frac{1}{1 - \|\lambda^{-1}x\|^2} \right) & \text{si } \|x\| < \lambda, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (1.9)$$

donde c es una constante tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(x) dx = 1$. Observe que $\phi_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\lambda(x) dx = 1$ y $\text{supp } \phi_\lambda := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \phi_\lambda(x) \neq 0\}} = \overline{B_\lambda(0)}$ para todo $\lambda > 0$. Definimos

$$f_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(y) \phi_\lambda(y - x) dy, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \lambda > 0.$$

Consecuentemente, tenemos que $f_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $\lambda > 0$ y $f_\lambda \rightarrow f$ uniformemente en $\overline{\Omega}$ cuando $\lambda \rightarrow 0^+$. De esta manera, tomando $g := f_\lambda$, para un λ suficientemente pequeño, obtenemos la conclusión deseada.

1.2.1. Grado de Brouwer

Aquí presentamos el grado de Brouwer, el cual está definido únicamente en espacios finito-dimensionales. En esta parte, Ω representa un subconjunto abierto, acotado, no vacío de \mathbb{R}^n y $\partial\Omega$, su frontera. Una función $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice suave, si $f \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$; en este caso escribimos $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Para una función suave f , el símbolo $J_f(x)$ denota el determinante Jacobiano de f evaluado en el punto $x \in \Omega$; es decir,

$$J_f(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Dada una función $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, un punto $x \in \Omega$ se dice punto crítico de f , si $J_f(x) = 0$. El conjunto de todos los puntos críticos de f se denota por $S_f(\Omega)$;

$$S_f(\Omega) := \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}.$$

Un valor $y \in \mathbb{R}^n$ se define regular, si $\{f^{-1}(y)\} \cap S_f(\Omega) = \emptyset$. Cabe anotar que bajo esta definición, todo punto que no pertenezca a la imagen de f es regular y se define singular si no es regular.

Grado de Brouwer en el caso regular:

El primer paso para definir el Grado de Brouwer lo más general posible, es definirlo para funciones de clase C^∞ y para valores $y \in \mathbb{R}^n$ regulares.

Definición 1.2.3 (Grado de Brouwer) Sean $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e $y \in \mathbb{R}^n$ un valor regular para f tal que $y \notin f(\partial\Omega)$, definimos el grado de Brouwer de f en el valor y relativo a Ω por:

$$d(f, \Omega, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign } J_f(x),$$

teniendo presente la convención usual $\sum_{\emptyset} = 0$.

Dado un punto $y \in \mathbb{R}^n$ regular para f , el teorema de la función inversa (consultar [14], p. 149, Teorema 15.2) garantiza para cada $x \in f^{-1}(y)$ la existencia de un abierto U_x , vecindad de x , tal que $f^{-1}(y) \cap U_x = \{x\}$ y en consecuencia x debe ser un elemento aislado en $f^{-1}(y)$. Si el conjunto $f^{-1}(y)$ consta de infinitos elementos, la compacidad de $\bar{\Omega}$ implica la existencia de un punto de acumulación $x_0 \in \bar{\Omega}$. La continuidad de f implica que $f(x_0) = y$ y debido a que $y \notin f(\partial\Omega)$ se concluye que $x_0 \in \Omega$. Pero x_0 debe ser un elemento aislado de $f^{-1}(y)$, lo cual es una contradicción. Esto demuestra que $d(f, \Omega, y)$ está bien definido.

Ejemplo. Sean $r > 1$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida por $f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$, $\Omega = B_r(0)$ y $a = (1, 0)$. Es sencillo establecer que $f \in C^\infty(\bar{B}_r(0))$ y

$$f^{-1}(a) = \left\{ (1, 0), \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \subset B_r(0).$$

Además,

$$J_f(x, y) = \begin{vmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{vmatrix}.$$

Un cálculo directo muestra que $J_f(1, 0) = J_f\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = J_f\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 9$. Por lo tanto, usando la Definición 1.2.3, $d(f, B_r(0), a) = 3$.

La siguiente proposición permite sustituir el término $\sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign } J_f(x)$ en la Definición 1.2.3 por una integral adecuada.

Proposición 1.2.4 Sean f e y como en la Definición 1.2.3 y ϕ_ϵ la función definida en (1.9). Entonces existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(y, f)$ tal que

$$d(f, \Omega, y) = \int_{\Omega} \phi_\epsilon(f(x) - y) J_f(x) dx \quad \text{para todo } \epsilon \in (0, \epsilon_0).$$

Demostración. Si $f^{-1}(y) = \emptyset$, la conclusión es trivial debido a que $\phi_\epsilon(f(x) - y) \equiv 0$ para $\epsilon < \varrho(y, f(\bar{\Omega}))$. En otro caso, si $f^{-1}(y) = \{x^1, x^2, \dots, x^m\}$, existen bolas disjuntas $B_\rho(x^i)$ de manera que $f|_{B_\rho(x^i)}$ es un homeomorfismo en una vecindad V_i del valor y y tal que

$$\text{sign } J_f(x) = \text{sign } J_f(x^i), \quad \text{para todo } x \in B_\rho(x^i).$$

Consideremos $B_r(y) \subset \cap_{i=1}^m V_i$ y $U_i = B_\rho(x^i) \cap f^{-1}(B_r(y))$. De esta manera, $|f(x) - y| \geq \beta$ en $\bar{\Omega} \setminus \cup_{i=1}^m U_i$ para algún $\beta > 0$. Por tanto, si $\epsilon < \beta$, entonces

$$\int_{\Omega} \phi_\epsilon(f(x) - y) J_f(x) dx = \sum_{i=1}^m \text{sign } J_f(x^i) \int_{U_i} \phi_\epsilon(f(x) - y) |J_f(x)| dx.$$

Note que $J_f(x) = J_{f-y}(x)$ y $f(U_i) - y = B_r(0)$. Por último, haciendo un cambio de variable en la integral derecha de (1.2.1) obtenemos que

$$\int_{U_i} \phi_\epsilon(f(x) - y) |J_f(x)| dx = \int_{B_r(0)} \phi_\epsilon(x) dx = 1, \quad \text{para } \epsilon < \min\{\beta, r\} := \epsilon_0.$$

Esto concluye la prueba.

Grado de Brouwer en el caso no regular:

Una vez definido el grado de Brouwer sobre las funciones suaves donde y es un valor regular de f , se extiende para aquellas en las que y no es un valor regular. Para ello, se hace necesaria enunciar la siguiente proposición

Proposición 1.2.5 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in C^1(U)$. Entonces $\mu_n(f(S_f)) = 0$, donde μ_n denota la medida de Lebesgue n -dimensional.

Demostración. Ver [14], p. 8, Proposición 1.4.

Esta proposición implica que el conjunto de valores regulares de f es denso en \mathbb{R}^n y, junto con el teorema de la función inversa, implica además que los valores singulares de f son aislados en \mathbb{R}^n .

Observación. La Proposición 1.2.5 es una consecuencia del Lema de Sard: Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(U)$ y $U^* \subset U$ medible. Entonces $f(U^*)$ es medible y $\mu(f(U^*)) \leq \int_{U^*} |J_f(x)| dx$. (Para una demostración detallada ver [13], p. 55, Teorema 3.1).

Definición 1.2.6 Sean $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ e $y \notin f(\partial\Omega)$. Definimos el grado de f en el valor y relativo a Ω como $d(f, \Omega, y)$, donde

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y'),$$

donde y' es cualquier valor regular de f tal que $\|y - y'\| < \varrho(y, f(\partial\Omega))$.

Para garantizar la buena definición de $d(f, \Omega, y)$, consideremos y_1 e y_2 valores regulares de f tales que $\|y - y_i\| < \varrho(y, f(\partial\Omega))$ para $i = 1, 2$. La Proposición 1.2.4 implica la existencia de ϵ_0 tal que

$$d(f, \Omega, y_i) = \int_{\Omega} \phi_\epsilon(f(x) - y_i) J_f(x) dx \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ y para todo } \epsilon \in (0, \epsilon_0).$$

donde ϕ_ϵ es como en (1.9). Debemos mostrar que

$$d(f, \Omega, y_1) = d(f, \Omega, y_2).$$

En efecto,

$$d(f, \Omega, y_2) - d(f, \Omega, y_1) = \int_{\Omega} (\phi_\epsilon(f(x) - y_2) - \phi_\epsilon(f(x) - y_1)) J_f(x) dx.$$

Definamos

$$w(x) = (y_1 - y_2) \int_0^1 \phi_\epsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2)) dt.$$

Sea y_j^i la componente i -ésima del vector y_j para $j = 1, 2$. Observe que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} w(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} w_i(x) = \sum_{i=1}^n (y_1^i - y_2^i) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_\epsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2)) dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^n (y_1^i - y_2^i) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_\epsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2)) dt \\
&= \int_0^1 \nabla \phi_\epsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2)) \cdot (y_1 - y_2) dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \phi_\epsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2)) dt \\
&= \phi_\epsilon(x - y_2) - \phi_\epsilon(x - y_1).
\end{aligned}$$

De donde,

$$\operatorname{div} w(x) = \phi_\epsilon(x - y_2) - \phi_\epsilon(x - y_1). \quad (1.10)$$

El siguiente lema muestra que existe una función $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{supp}(v) \subset \Omega$ y

$$[\phi_\epsilon(f(x) - y_2) - \phi_\epsilon(f(x) - y_1)] J_f(x) = \operatorname{div} v(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

La conclusión deseada es consecuencia de dicha función v ; consideremos el cubo $Q = [-a, a]^n$ tal que $\Omega \subset Q$, se sigue que

$$\begin{aligned}
d(f, \Omega, y_2) - d(f, \Omega, y_1) &= \int_\Omega \operatorname{div} v(x) dx = \int_Q \operatorname{div} v(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n = 0.
\end{aligned}$$

Lema 1.2.7 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $d_{ij}(x)$ el cofactor de $\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}$ en $J_f(x)$, esto es, $d_{ij}(x)$ es el producto de $(-1)^{i+j}$ con el determinante obtenido del Jacobiano de f evaluado en x tras cancelar la fila j -ésima y la columna i -ésima y

$$v_i(x) := \begin{cases} \sum_{j=1}^n w_j(f(x)) d_{ij}(x), & x \in \overline{\Omega} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $v(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x))$, entonces $\operatorname{div} v(x) = \operatorname{div} w(f(x)) J_f(x)$, donde $w(x) = (w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x))$ es como en (1.10).

Demostración. Ver [5], p. 6, Lema 1.2.4.

Ejemplo. Sea $(a, b) \subset \mathbb{R}$ tal que $0 \in (a, b)$, $f(x) = \alpha x^k$ con $\alpha \neq 0$ y $k \in \mathbb{N}$. Es fácil establecer bajo estas condiciones que cero es un valor singular de f . Para calcular $d(f, (a, b), 0)$ podemos considerar una perturbación de f , $f_\epsilon(x) = \alpha x^k + \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Entonces:

- En el caso k impar, entonces $f_\epsilon^{-1}(0) = \left\{ \left(\frac{-\epsilon}{\alpha} \right)^{1/k} \right\}$ y $f'_\epsilon \left(\left(\frac{-\epsilon}{\alpha} \right)^{1/k} \right) = \alpha k \left(\frac{-\epsilon}{\alpha} \right)^{\frac{k-1}{k}}$, esto muestra que cero es un valor regular de f_ϵ . Por lo tanto,

$$d(f, (a, b), 0) = d(f_\epsilon, (a, b), 0) = \text{sign} \left(\alpha k \left(\frac{-\epsilon}{\alpha} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right) = \text{sign}(\alpha).$$

- Para el caso k par. Si $\alpha > 0$, entonces $f_\epsilon^{-1}(0) = \emptyset$, se sigue que cero es un valor regular de f_ϵ y por tanto, $d(f, (a, b), 0) = d(f_\epsilon, (a, b), 0) = 0$. Si $\alpha < 0$, entonces $f_\epsilon^{-1}(0) = \left\{ \left(\frac{-\epsilon}{\alpha} \right)^{1/k}, -\left(\frac{-\epsilon}{\alpha} \right)^{1/k} \right\}$. De aquí que

$$\begin{aligned} d(f, (a, b), 0) &= d(f_\epsilon, (a, b), 0) = \text{sign} \left(\alpha k \left(\frac{-\epsilon}{\alpha} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right) + \text{sign} \left(-\alpha k \left(\frac{-\epsilon}{\alpha} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right) \\ &= -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo. Sea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ y $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. El origen es un valor singular de f , así que lo aproximamos por una sucesión de puntos regulares, todos ellos sobre el eje x . Consideremos (ϵ_n) una sucesión estrictamente decreciente tal que $0 < \epsilon_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon_n \rightarrow 0$ y sea $y_n = (\epsilon_n, 0)$. Entonces (y_n) es una sucesión de puntos regulares de f que converge hacia el origen. Si definimos $f_n(x, y) = f(x, y) - y_n$ entonces $f_n^{-1}(0, 0) = \{(-\sqrt{\epsilon_n}, 0), (\sqrt{\epsilon_n}, 0)\}$, $f_n^{-1}(0, 0) \cap \partial\Omega = \emptyset$ y

$$J_{f_n}(x, y) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix}.$$

De esta forma, $d(f_n, \Omega, 0) = 1 + 1 = 2$ y por tanto,

$$d(f, \Omega, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, \Omega, 0) = 2.$$

Grado de Brouwer para funciones continuas:

Para definir el grado de Brouwer en funciones continuas nos apoyamos en la Proposición 1.2.2 y mostramos que todas las funciones de clase $C^\infty(\overline{\Omega})$ suficientemente cercanas a una función continua, tienen el mismo grado.

Proposición 1.2.8 *Sea $h : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable tal que $h(t_0, x_0) = 0$ y $J_{h(t_0, \cdot)} \neq 0$ para algún $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$. Entonces, existen un intervalo $(t_0 - r, t_0 + r)$, una bola $B_\delta(x_0) \subset \Omega$ y una función continua $x : (t_0 - r, t_0 + r) \rightarrow B_\delta(x_0)$ tales que $x(t_0) = x_0$ y $x(t)$ es la única solución en $B_\delta(x_0)$ de $h(t, x) = 0$.*

Demostración. Es un caso particular del Teorema de la función implícita [14], p. 148, Teorema 15.1.

Proposición 1.2.9 Sean $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e $y \notin f(\partial\Omega)$. Entonces, para $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$ existe $\delta = \delta(f, y, g) > 0$ tal que $d(f + tg, \Omega, y) = d(f, \Omega, y)$ para todo $|t| < \delta$.

Demostración. Supongamos que $f^{-1}(y) = \{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ e y es un valor regular. Sean $f_t := f + tg$ y $h(t, x) := f_t(x) - y$. Observe que $h(0, x^i) = 0$ y $J_{h(0, \cdot)}(x^i) = J_f(x^i) \neq 0$. La Proposición 1.2.8 implica la existencia de un intervalo $(-r, r)$, bolas $\overline{B_\rho(x^i)}$ disjuntas y funciones continuas $z^i : (-r, r) \rightarrow B_\rho(x^i)$ de manera que

$$f_t^{-1}(y) \cap V = \{z^1(t), z^2(t), \dots, z^m(t)\}, \quad \text{para } V := \cup_{i=1}^m B_\rho(x^i).$$

El valor de ρ se puede escoger lo suficientemente pequeño tal que $\text{sign } J_f(x) = \text{sign } J_f(x^i)$ en $\overline{B_\rho(x^i)}$. Dado que $|f(x) - y| > \beta$ en $\overline{\Omega} \setminus V$ para algún $\beta > 0$. Más aún,

$$f_t^{-1}(y) = \{z^1(t), z^2(t), \dots, z^m(t)\} \quad \text{para } |t| < \delta_0 := \min\{r, \beta|g|^{-1}\},$$

donde $|g| := \max\{|g(x)| : x \in \overline{\Omega}\}$. Por último, debido a que $J_{f_t}(x)$ es una aplicación continua en (t, x) , se puede encontrar $\delta < \delta_0$ tal que

$$|J_{f_t}(x) - J_f(x)| < \min\{|J_f(z)| : z \in \overline{V}\} \quad \text{para } |t| < \delta \text{ y } x \in \overline{V}.$$

Por tanto, $\text{sign } J_{f_t}(z^i(t)) = \text{sign } J_f(z^i(t)) = \text{sign } J_f(x^i)$. De aquí se concluye que $d(f_t, \Omega, y) = d(f, \Omega, y)$ para todo $|t| < \delta$.

En caso de que y no sea un valor regular, basta con escoger un valor regular $y_0 \in B_{\alpha/3}(y)$ con $\alpha = \varrho(y, f(\partial\Omega))$ y aplicando el argumento anterior encontrar δ_0 tal que

$$d(f_t, \Omega, y_0) = d(f, \Omega, y_0) \quad \text{para todo } |t| < \delta_0.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_0, \frac{1}{3}|g|^{-1}\alpha\}$. Entonces, $|y_0 - f_t(x)| > \frac{\alpha}{3}$ para todo $x \in \partial\Omega$ y $|t| < \delta$ y, por tanto, $|y_0 - y| < \varrho(y_0, f_t(\partial\Omega))$. Se sigue que $d(f_t, \Omega, y_0) = d(f_t, \Omega, y)$.

Finalmente, si $f^{-1}(y) = \emptyset$, entonces $f(x) + tg(x) \neq y$ en $\overline{\Omega}$ para algún $|t|$ suficientemente pequeño, y por tanto ambos grados coinciden y son cero.

Definición 1.2.10 Sea $f \in C(\overline{\Omega})$ e $y \notin f(\partial\Omega)$. Definimos

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y),$$

donde $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $\|f - g\|_\infty < \varrho(y, f(\partial\Omega))$ y $d(g, \Omega, y)$ es como en la Definición 1.2.6.

En el siguiente teorema muestra las propiedades más importantes del grado de Brouwer.

Teorema 1.2.11 Sean $f \in C(\overline{\Omega})$ e $y \notin f(\partial\Omega)$. Entonces existe un entero $d(f, \Omega, y)$ que satisface las siguientes propiedades:

1. **Normalización:** Si $y \in \Omega$, entonces $d(I, \Omega, y) = 1$.

2. **Aditividad:** Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos y disjuntos de Ω , entonces para toda función $f \in C(\overline{\Omega})$ e $y \notin f(\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ se tiene

$$d(f, \Omega, y) = d(f|_{\Omega_1}, \Omega_1, y) + d(f|_{\Omega_2}, \Omega_2, y).$$

3. **Invarianza por homotopías:** Sean $h \in C(\overline{\Omega} \times [0, 1])$, $y \in C([0, 1])$, con la propiedad $y(t) \notin h(\partial\Omega, t)$ para todo $t \in [0, 1]$, entonces

$$d(h(\cdot, t), \Omega, y(t))$$

está bien definido y es independiente de $t \in [0, 1]$.

4. **Solución:** Si $d(f, \Omega, y) \neq 0$, entonces existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = y$.

5. **Continuidad:** La función $d(\cdot, \Omega, y) : \{f \in C(\overline{\Omega}) : y \notin f(\partial\Omega)\} \rightarrow \mathbb{Z}$ es continua.

6. **Invarianza por traslaciones:** Para toda $f \in C(\overline{\Omega})$ y todo $y \notin f(\partial\Omega)$ se tiene

$$d(f, \Omega, y) = d(f - y, \Omega, 0).$$

7. **Escisión:** Si Ω_1 es un subconjunto abierto de Ω , $f \in C(\overline{\Omega})$ e y es tal que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$, entonces

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y).$$

8. **Dependencia del valor en el borde:** Para todo par de funciones $f, g \in C(\overline{\Omega})$, e $y \notin f, g(\partial\Omega)$ y tales que $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$, se tiene

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y).$$

Demostración. Ver [3], p. 47, Teorema 4.1.1.

Observación. Es importante anotar que el grado de Brouwer está totalmente determinado por las propiedades 1, 2 y 3 del Teorema (1.2.11) en el sentido de que existe una única función que satisface dichas propiedades y es la dada en la Definición 1.2.3. Una prueba se encuentra en [9], p. 535, Teorema 12.A.

Ejemplo. Consideremos $\Omega = (-1, 1)$ y la función $h : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(t, x) = txe^x + (1 - t)x.$$

De esta forma h es continua en $[0, 1]$ para cada $t \in [0, 1]$, h no tiene ceros en $\{-1, 1\} = \partial\Omega$ y $h(0, x) = x$ y $h(1, x) = xe^x$. Por lo tanto, si $f(x) = xe^x$,

$$d(f, \Omega, 0) = d(I, \Omega, 0) = 1.$$

Ejemplo. Sean $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(a)f(b) \neq 0$. Comprobemos que

$$d(f, (a, b), 0) = \frac{1}{2} (\text{sign } (f(b)) - \text{sign } (f(a))).$$

En efecto, consideremos la recta $g(x) = \alpha x + \beta$ tal que $g(a) = f(a)$ y $g(b) = f(b)$. Explícitamente,

$$g(x) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x + \left(f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a \right).$$

De esta manera, f y g son homotópicas en $[a, b]$ y por tanto,

$$d(f, (a, b), 0) = d(g, (a, b), 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(a)f(b) > 0 \\ \text{sign } \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) & \text{si } f(a)f(b) < 0, \end{cases}$$

y observe que

$$d(g, (a, b), 0) = \frac{1}{2} (\text{sign } (f(b)) - \text{sign } (f(a))).$$

Note que el Teorema de Bolzano puede ser reformulado en los siguientes términos:

«Si $d(f, (a, b), 0) \neq 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ».

El siguiente teorema muestra la relación entre el grado de Brouwer en espacios de diferentes dimensiones:

Teorema 1.2.12 Sean $1 \leq m < n$, $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua. Si $y \notin f(\partial\Omega)$. Entonces

$$d(f, \Omega, y) = d(f_m, \Omega \cap \mathbb{R}^m, y),$$

donde f_m es la restricción de f en $\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m$.

Demostración. Podemos asumir que $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e y un valor regular de g en $\overline{\Omega}$. Un cálculo directo muestra que $J_g(x) = J_{g_m}(x)$ y la conclusión se sigue de la Definición 1.2.6. Esto concluye la demostración.

Por otra parte, para encontrar un punto fijo de una función $f \in C(\overline{\Omega})$ debemos resolver una ecuación del tipo

$$f(x) = x, \quad x \in \overline{\Omega},$$

o equivalentemente,

$$x - f(x) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Con lo anterior, definimos el índice de punto fijo de f respecto a Ω por

$$i(f, \Omega) := d(I - f, \Omega, 0). \tag{1.11}$$

El índice de punto fijo es una poderosa herramienta; mide la cantidad de puntos fijos de f en Ω teniendo en cuenta sus multiplicidades positivas y negativas. Note que como consecuencia del Teorema 1.2.11, si $i(f, \Omega) \neq 0$, entonces f tiene un punto fijo en Ω .

A continuación presentamos una de las consecuencias del Teorema 1.2.11:

Teorema 1.2.13 (Teorema de punto fijo de Brouwer) *Si $f : \overline{B_r(0)} \rightarrow \overline{B_r(0)}$ es una función continua, entonces f tiene un punto fijo en $\overline{B_r(0)}$.*

Demostración. Es posible asumir que $f(x) \neq x$ para todo $x \in \partial B_r(0)$, pues en caso contrario no hay nada que demostrar.

Sea $h(x, t) := x - tf(x)$. De esta manera, $h : \overline{B_r(0)} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ define una función continua tal que $0 \notin h(\partial B_r(0) \times [0, 1])$. Tenemos entonces que

$$|h(x, t)| \geq |x| - t|f(x)| \geq (1 - t)r > 0 \quad \text{para todo } (x, t) \in \partial B_r(0) \times [0, 1],$$

y $x - f(x) \neq 0$ para $\partial B_r(0) \times \{t = 1\}$. Aplicando la invarianza por homotopías tenemos

$$d(I - f, B_r(0), 0) = d(h(\cdot, 1), B_r(0), 0) = d(h(\cdot, 0), B_r(0), 0) = d(I, B_r(0), 0) = 1.$$

La propiedad de solución implica la existencia de un $x \in B_r(0)$ tal que $x - f(x) = 0$.

Observación. El teorema anterior también es cierto si Ω sólo es un conjunto homeomorfo a un conjunto compacto y convexo de \mathbb{R}^n .

Por último, se puede definir el grado de Brouwer de una función continua en un espacio vectorial topológico de dimensión finita de la siguiente manera:

Definición 1.2.14 *Sean, X un espacio vectorial topológico de dimensión n , $\Omega \subset X$ abierto y acotado, $f : \overline{\Omega} \rightarrow X$ continua e $y \notin f(\partial\Omega)$. Se define*

$$d(f, \Omega, y) := d(h \circ f \circ h^{-1}, h(\Omega), h(y)),$$

donde $h : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo lineal dado por $h(x_i) = e_i$. Aquí $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ representan una base para X y la base usual para \mathbb{R}^n , respectivamente.

1.2.2. Índice de punto fijo de Leray-Schauder

En esta sección, construimos el índice de punto fijo de Leray-Schauder. Éste es la generalización para espacios de dimensión infinita del índice de punto fijo definido en (1.11). En este contexto, las funciones continuas son sustituidas por operadores compactos. La idea fundamental para dar el salto de dimensión finita a infinita, es aproximar a tales operadores por medio de operadores de rango finito (esto es, cuyo rango es un espacio de dimensión finita). Para esta parte, E representa un espacio de Banach real y $\Omega \subset E$ un conjunto no vacío, abierto y acotado.

Definición 1.2.15 Un operador $T : \Omega \rightarrow E$ se dice compacto si satisface las siguientes condiciones:

1. T es continuo,
2. T envía conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos.

La importancia de los operadores compactos en el Análisis Funcional está en el hecho de que muchos resultados sobre operadores continuos en \mathbb{R}^n pueden ser llevados a espacios de Banach más generales si la continuidad es reemplazada por la compacidad.

Lema 1.2.16 Sea $T : \bar{\Omega} \rightarrow E$ un operador dado. Entonces T es compacto si y sólo si, para $\epsilon > 0$, existen un espacio de dimensión finita F y un operador continuo $T_\epsilon : \bar{\Omega} \rightarrow F$ tal que

$$\|T_\epsilon x - Tx\|_E < \epsilon \quad \text{para todo } x \in \bar{\Omega}. \quad (1.12)$$

Demostración. Sea T compacto. Dado que $T(\bar{\Omega})$ es relativamente compacto en E , para $\epsilon > 0$, existe un conjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset \bar{\Omega}$ tal que

$$T(\bar{\Omega}) \subset \bigcup_{i=1}^m B_\epsilon(Tx_i).$$

Definamos el operador $T_\epsilon : \bar{\Omega} \rightarrow F := \text{span}\{Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_m\}$ como

$$T_\epsilon x = \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i(x)}{\Gamma(x)} Tx_i, \quad \text{para } x \in \bar{\Omega},$$

donde $\varphi_i(x) = \max\{0, \epsilon - \|Tx - Tx_i\|_E\}$ y $\Gamma(x) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x)$. El operador T_ϵ satisface las condiciones deseadas.

Para la otra parte de la demostración, la continuidad de T es consecuencia de (1.12) porque

$$\|Tx - Ty\|_E = \|(Tx - T_\epsilon x) + (T_\epsilon y - Ty) + (T_\epsilon x - T_\epsilon y)\|_E \leq 2\epsilon + \|T_\epsilon x - T_\epsilon y\|_E < 3\epsilon,$$

para ϵ suficientemente pequeño y $\|x - y\| < \delta(\epsilon)$. Más aún, $T(\bar{\Omega})$ es relativamente compacto como consecuencia de (1.12) porque para cada $\epsilon > 0$, el conjunto $T(\bar{\Omega})$ puede ser cubierto por un número finito de bolas de radio 2ϵ debido a que $T_\epsilon(\bar{\Omega})$ puede ser cubierto con un número finito de bolas de radio ϵ .

Ejemplo. Consideremos el operador lineal $T : l_2 \rightarrow l_2$ definido por

$$T(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_i}{i}, \dots\right).$$

Sea $T_n(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, 0, 0, \dots)$. Entonces T_n es lineal y es sencillo observar que

$$\|T_n x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{x_i}{i} \right|^2 \leq \|x\|_2^2 \quad \text{y} \quad \|T_n e_1\|_2 = 1,$$

entonces $\|T_n\| = 1$ y en consecuencia, para todo $n \in \mathbb{N}$, T_n es continuo. Ahora,

$$\|T_n x - T x\|_2^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left| \frac{x_i}{i} \right|^2 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \|x\|_2^2.$$

De esta manera, $\|T_n - T\| \leq \frac{1}{n+1}$. Por tanto, $T_n \rightarrow T$ y deducimos que T es compacto.

Lema 1.2.17 *Sea $T : \overline{\Omega} \rightarrow E$ un operador compacto tal que $Tx \neq x$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $x \neq tT_{\epsilon_1}x + (1-t)T_{\epsilon_2}x$ para todo $t \in [0, 1]$ y $x \in \overline{\Omega}$, donde $\epsilon_i \in (0, \epsilon_0)$ y $T_{\epsilon_i} : \overline{\Omega} \rightarrow F_{\epsilon_i}$ para $i = 1, 2$ como en el Lema 1.2.16.*

Demostración. Argumentando por contradicción, supongamos que existe $\epsilon_1^j \rightarrow 0$, $\epsilon_2^j \rightarrow 0$, $t_j \rightarrow t_0$ y $x_j \in \overline{\Omega}$ tal que

$$t_j T_{\epsilon_1^j} x_j + (1 - t_j) T_{\epsilon_2^j} x_j = x_j, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots$$

La compacidad de T implica que la sucesión (Tx_j) tiene una subsucesión (Tx_{j_k}) convergente a algún $y \in E$. Por el Lema 1.2.16, $T_{\epsilon_j^k} x_{j_k} \rightarrow y$ para $j = 1, 2$. Se sigue que, $x_{j_k} \rightarrow y \in \overline{\Omega}$ y por lo tanto, $Ty = y$, lo cual es una contradicción.

Observación. Dado un operador compacto $T : \overline{\Omega} \rightarrow E$. Si $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$. Entonces por el Lema 1.2.17 existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$x \neq tT_{\epsilon_1}x + (1 - t)T_{\epsilon_2}x \quad \text{para todo } t \in [0, 1] \text{ y } x \in \partial\Omega,$$

donde, para $i = 1, 2$, $\epsilon_i \in (0, \epsilon_0)$ y $T_{\epsilon_i} : \overline{\Omega} \rightarrow F_{\epsilon_i}$ son como en el Lema 1.2.16. De esta manera, podemos concluir que el grado de Brouwer $d(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0)$ está bien definido.

La observación anterior nos permite definir el índice de punto fijo de Leray-Schauder para un operador compacto T respecto a Ω de la siguiente manera:

Definición 1.2.18 *Dado un operador compacto $T : \overline{\Omega} \rightarrow E$ tal que $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$. El índice de punto fijo de Leray-Schauder del operador T con respecto a Ω , denotado por $i(T, \Omega)$, se define por,*

$$i(T, \Omega) := d(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0),$$

donde $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ y ϵ_0 es como en el Lema (1.2.17).

Para mostrar que el índice de punto fijo de Leray-Schauder dado en la definición anterior está bien definido, observe que la invarianza por homotopías del grado de Brouwer implica que

$$i(T_{\epsilon_1}, \Omega \cap \text{span}\{F_{\epsilon_1} \cup F_{\epsilon_2}\}) = i(T_{\epsilon_2}, \Omega \cap \text{span}\{F_{\epsilon_1} \cup F_{\epsilon_2}\}).$$

Pero $T_{\epsilon_i} : \overline{\Omega} \cap \text{span}\{F_{\epsilon_1} \cup F_{\epsilon_2}\} \rightarrow F_{\epsilon_i}$ para $i = 1, 2$. El Teorema 1.2.12 implica que

$$i(T_{\epsilon_1}, \Omega \cap \text{span}\{F_{\epsilon_1} \cup F_{\epsilon_2}\}) = i(T_{\epsilon_1}, \Omega \cap F_{\epsilon_1})$$

y

$$i(T_{\epsilon_2}, \Omega \cap \text{span}\{F_{\epsilon_1} \cup F_{\epsilon_2}\}) = i(T_{\epsilon_2}, \Omega \cap F_{\epsilon_2}).$$

Por lo tanto,

$$i(T_{\epsilon_1}, \Omega \cap F_{\epsilon_1}) = i(T_{\epsilon_2}, \Omega \cap F_{\epsilon_2}).$$

El índice de punto fijo de Leray-Schauder cumple con propiedades análogas a las del grado de Brouwer (Teorema 1.2.11). Es importante resaltar las siguientes:

1. **Normalización:** Si $Tx = x_0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$ y algún $x_0 \in \Omega$ fijo, entonces $i(T, \Omega) = 1$.
2. **Aditividad:** Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos y disjuntos de Ω . Si $0 \notin (I - T)(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, entonces
$$i(T, \Omega) = i(T, \Omega_1) + i(T, \Omega_2).$$
3. **Invarianza por homotopías:** Sea $T_t : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow E$ un operador compacto tal que $T_t x \neq x$ para todo $(t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$. Entonces, $i(T_t, \Omega)$ permanece constante para $t \in [0, 1]$.
4. **Solución:** Si $i(T, \Omega) \neq 0$, entonces la ecuación $Tx = x$ tiene una solución en Ω .

Observación. Análogamente a lo que sucede en el grado de Brouwer, las propiedades anteriores determinan el índice de punto fijo de Leray-Schauder de manera única como en la Definición 1.2.18. Ver [9], p. 542, Teorema 12.B.

El siguiente ejemplo muestra que el Teorema de punto fijo de Brouwer (Teorema 1.2.13) falla en espacios de dimensión infinita. El Teorema 1.2.19 es la versión análoga del Teorema 1.2.13 para espacios de Banach más generales y se conoce como Teorema de punto fijo de Schauder.

Ejemplo. Sea $T : l_2 \rightarrow l_2$ el operador definido mediante

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\sqrt{1 - \|x\|_2}, x_1, x_2, \dots \right).$$

para todo $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$. Entonces $T : \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ es continuo sin puntos fijos en $\overline{B_1(0)}$.

Teorema 1.2.19 Sean $C \subset E$ un conjunto no vacío, cerrado y convexo y $T : C \rightarrow C$ un operador compacto. Entonces T tiene un punto fijo en C .

Demostración. Se procede de manera análoga al Teorema 1.2.13.

1.2.3. Índice de punto fijo para ternas admisibles

En esta parte se incluye algunas definiciones y resultados necesarios para abordar el próximo capítulo. Para profundizar en ellos se recomienda al lector dirigirse a los escritos de J. Bona [2] y A. Granas [10].

Definición 1.2.20 *Dado un espacio de Banach E con norma $\|\cdot\|_E$. Un conjunto cerrado $K \subset E$ distinto de vacío se denomina un cono en E si satisface las siguientes condiciones:*

1. $\lambda K = \{\lambda u : u \in K\} \subseteq K$ para todo $\lambda \geq 0$.
2. $K + K = \{u + v : u, v \in K\} \subseteq K$.
3. $K \cap \{-K\} = K \cap \{-u : u \in K\} = \{0\}$.

Note que las condiciones 1 y 2 implican que un cono K es un subconjunto convexo de E .

Para $0 < r < R < \infty$, se definen los siguientes conjuntos en E :

$$K_r := K \cap B_r(0), \quad \partial K_r := K \cap \partial B_r(0), \quad K_r^R := \{u \in K : r < \|u\|_E < R\}.$$

Definición 1.2.21 *Sea K un cono en el espacio E . Un operador A definido en (por lo menos) K y con rango en E , se dice positivo si $A(K) \subset K$.*

Definición 1.2.22 *Una terna (K, A, U) se denomina admisible si se cumplen las siguientes condiciones*

1. K es un subconjunto convexo de E ,
2. $U \subset K$ es abierto en la topología relativa sobre K ,
3. A es un operador positivo y compacto sobre K .
4. A no tiene puntos fijos en ∂U . La frontera de U es en la topología relativa de K .

A. Granas [10] implica la existencia de una función i de valores enteros definida en el conjunto de todas las ternas admisibles en E tal que satisface las propiedades básicas del índice de Leray-Schauder.

A continuación presentamos algunos lemas y teoremas importantes para el resto del documento. Las pruebas de estos resultados pueden ser consultadas en [2]. Consideremos A positivo y compacto en el cono K .

Lema 1.2.23 *Supóngase que $0 < \rho < \infty$ y que de los siguientes enunciados sólo uno se cumple,*

- a. $Ax - x \notin K$ para todo $x \in \partial K_\rho$.

b. $tAx \neq x$ para todo $x \in \partial K_\rho$ y todo $t \in [0, 1]$.

Entonces la terna (K, A, K_ρ) es admisible y $i(K, A, K_\rho) = 1$.

Lema 1.2.24 *Supóngase que $0 < \rho < \infty$ y que de los siguientes enunciados sólo uno se cumple,*

ã. $x - Ax \notin K$ para todo $x \in \partial K_\rho$.

ñ. Existe $\tilde{x} \in K$ distinto de cero, tal que $x - Ax \neq \lambda \tilde{x}$ para todo $x \in \partial K_\rho$ y todo $\lambda \geq 0$.

Entonces la terna (K, A, K_ρ) es admisible y $i(K, A, K_\rho) = 0$.

Lema 1.2.25 *Sea (K, A, U) admisible. Si existe $\tilde{x} \in K$ distinto de cero, tal que $x - Ax \neq \lambda \tilde{x}$ para todo $x \in \partial U$ y todo $\lambda \geq 0$, entonces $i(K, A, U) = 0$.*

Teorema 1.2.26 *Supóngase que a. ó b. del Lema 1.2.23 se cumple para algún r con $0 < r < \infty$ y que ã. ó ñ. del Lema 1.2.24 se tiene para algún R tal que $r < R < \infty$. Entonces, A tiene al menos un punto fijo en el conjunto $K_r^R := \{u \in K : r < \|u\|_E < R\}$. Más aún, $i(K, A, K_r^R) = -1$.*

Capítulo 2

Existencia de soluciones tipo ondas viajeras periódicas

En este capítulo establecemos la existencia de soluciones del tipo onda viajera periódica del sistema Benjamin-Ono regularizado (1) usando las ideas expuestas en Bona et al. [2], Chen [4] y Muñoz [17] en el marco de las soluciones tipo onda viajera periódica de problemas no lineales. Bajo este marco de referencia, el estudiar la existencia de soluciones tipo onda viajera periódica del sistema (1) implica resolver una ecuación del tipo

$$w = \mathcal{A}w, \tag{2.1}$$

donde \mathcal{A} es un operador no lineal definido adecuadamente en $l_2 \times l_2$.

En general, operadores tales como \mathcal{A} son responsables de dificultades en la teoría de las ondas solitarias, ya que no se pueden aplicar directamente teoremas importantes de punto fijo y recursos aplicables a operadores compactos, que serían de utilidad al momento de resolver (2.1). Por esta razón, en [2] se recomienda adoptar la formulación en espacios de Fréchet porque permite especificar un espacio apropiado, en el que estos operadores son compactos. Esto trae consigo algunas desventajas, las cuales provienen de trabajar con un espacio de Fréchet no normalizable X . Este hecho limita la disponibilidad de una teoría del índice de punto fijo, pero es superado si se escoge apropiadamente un dominio estrecho de \mathcal{A} , específicamente un cono $K \subset X$, tal que la intersección de él con cualquier bola adecuadamente escogida, es acotada y consecuentemente mapeada por \mathcal{A} a un conjunto relativamente compacto en X . Esto permite adaptar el problema definido en un espacio de Fréchet, a la teoría de los operadores positivos que ha sido desarrollada para espacios de Banach y en particular, permite usar versiones del teorema de punto fijo para operadores no lineales que dejan invariante un cono.

2.1. Planteamiento del problema

Nuestra atención se centra en el sistema (1) el cual escribimos nuevamente a continuación:

$$\begin{aligned} \zeta_t - ((1 - \alpha\zeta)u)_x &= \frac{\epsilon^2}{6}\zeta_{xxt} \\ u_t + \alpha uu_x + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\zeta_x &= \frac{\rho_2}{\rho_1}\epsilon\mathcal{H}(u_{xt}) + \frac{\epsilon^2}{6}u_{xxt}, \\ \zeta(x, 0) &= \zeta_0(x) \quad y \quad u(x, 0) = u_0(x). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Es conveniente realizar los siguientes cambios de variables en el sistema (2.2):

$$\tilde{t} = \sqrt{\rho}t, \quad \tilde{\zeta}(x, \tilde{t}) = -\sqrt{\rho}\zeta(x, t), \quad y \quad \tilde{u}(x, \tilde{t}) = u(x, t). \quad (2.3)$$

Con esto, el sistema (2.2) toma la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{\tilde{t}} + \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}\tilde{\zeta}\right)\tilde{u}_x &= \frac{\epsilon^2}{6}\tilde{\zeta}_{x\tilde{x}\tilde{t}} \\ \tilde{u}_{\tilde{t}} + \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}\tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{\zeta}_x &= \frac{\rho_2}{\rho_1}\epsilon\mathcal{H}(\tilde{u}_{x\tilde{t}}) + \frac{\epsilon^2}{6}\tilde{u}_{x\tilde{x}\tilde{t}} \\ \tilde{\zeta}(x, 0) &= \tilde{\zeta}_0(x), \quad \tilde{u}(x, 0) = u_0(x), \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1$. Como se mencionó en la introducción, el sistema (2.4) (equivalentemente el sistema (2.2)) tiene soluciones del tipo onda viajera periódica si existen funciones u y ζ , parametrizadas por la velocidad de onda c , de la forma

$$u^*(x, t) = u(x - ct) = u(\xi) \quad y \quad \zeta^*(x, t) = \zeta(x - ct) = \zeta(\xi), \quad (2.5)$$

donde u y ζ son funciones $2l$ -periódicas que lo satisfacen para algunas constantes l y c apropiadas.

Para facilitar la notación, en este punto abandonamos las tildes del sistema (2.4). Sustituyendo las expresiones de (2.5) en (2.4) obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} -c\zeta' + u' + \alpha(u\zeta)' &= -\frac{c\epsilon^2}{6}\zeta''' \\ -cu' + \alpha uu' + \zeta' &= -\frac{\rho_2 c \epsilon}{\rho_1}\mathcal{H}(u'') - \frac{c\epsilon^2}{6}u'''. \end{aligned}$$

Integrando una vez a ambos lados en las ecuaciones anteriores, y tomando las constantes de integración iguales a cero, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones integro-diferenciales:

$$\begin{aligned} c\zeta - u - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}(u\zeta) &= \frac{c\epsilon^2}{6}\zeta'' \\ cu - \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}}u^2 - \zeta &= \frac{\rho_2 c \epsilon}{\rho_1}\mathcal{H}(u') + \frac{c\epsilon^2}{6}u''. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Observe que suponer las constantes de integración iguales a cero equivale a suponer las derivadas de u, ζ iguales a 0 en los extremos 0 y $2l$.

En primer lugar, note que $(\zeta, u) = (0, 0)$ es una solución trivial del sistema (2.6). Otras soluciones constantes $(\zeta, u) = (p_0, q_0)$ pueden ser halladas resolviendo el sistema

$$cp_0 - q_0 - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}p_0q_0 = 0 \quad (2.7)$$

$$cq_0 - \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}}q_0^2 - p_0 = 0. \quad (2.8)$$

Despejando p_0 de la ecuación (2.7) tenemos que

$$p_0 = \frac{q_0}{c - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}q_0}.$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación (2.8) obtenemos que q_0 satisfice:

$$\frac{\alpha^2}{2\rho}q_0^2 - \frac{3\alpha c}{2\sqrt{\rho}}q_0 + c^2 - 1 = 0.$$

En resumen, p_0 y q_0 satisfacen las ecuaciones:

$$p_0 = \frac{q_0}{c - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}q_0} \quad \text{y} \quad \frac{\alpha^2}{2\rho}q_0^2 - \frac{3\alpha c}{2\sqrt{\rho}}q_0 + c^2 - 1 = 0. \quad (2.9)$$

Un cálculo directo permite hallar explícitamente las soluciones constantes positivas del sistema (2.6):

$$q_0 = \frac{\sqrt{\rho}(3c - \sqrt{c^2 + 8})}{2\alpha} \quad \text{y} \quad p_0 = \frac{\sqrt{\rho}(3c - \sqrt{c^2 + 8})}{-\alpha(c - \sqrt{c^2 + 8})}.$$

Es importante anotar que si $c > 1$, entonces las soluciones q_0 y p_0 son reales positivas y satisfacen la desigualdad:

$$p_0 > q_0 > \frac{\sqrt{\rho}(c - 1)}{\alpha} > 0. \quad (2.10)$$

En efecto, suponer que $c > 1$ es equivalente a

$$c^2 + 4c + 4 > c^2 + 8,$$

lo que implica que

$$3c - \sqrt{c^2 + 8} > 2c - 2$$

de donde,

$$\frac{\sqrt{\rho}(3c - \sqrt{c^2 + 8})}{2\alpha} > \frac{\sqrt{\rho}(c - 1)}{\alpha}.$$

Por lo tanto,

$$q_0 > \frac{\sqrt{\rho}(c - 1)}{\alpha} > 0.$$

Además, esta última desigualdad es equivalente a $c - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} q_0 < 1$. Uniendo esto con la expresión para p_0 de (2.9) obtenemos el resultado deseado.

Estamos interesados en encontrar soluciones no constantes de las ecuaciones de onda viajera (2.6). Supongamos que estas soluciones $2l$ -periódicas, $\zeta(x - ct) = \zeta(\xi)$ y $u(x - ct) = u(\xi)$, pueden ser expresadas como series de Fourier de la forma:

$$\zeta(\xi) = \sum_n \zeta_n e^{i(n\pi/l)\xi} \quad y \quad u(\xi) = \sum_n u_n e^{i(n\pi/l)\xi}. \quad (2.11)$$

Sustituyendo las expresiones en (2.11) en las ecuaciones del sistema (2.6) tenemos que

$$\begin{aligned} c \sum_n \zeta_n e^{i(n\pi/l)\xi} - \sum_n u_n e^{i(n\pi/l)\xi} - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \left(\sum_n u_n e^{i(n\pi/l)\xi} \sum_n \zeta_n e^{i(n\pi/l)\xi} \right) = \\ \frac{c\epsilon^2}{6} \sum_n \zeta_n \left(\frac{in\pi}{l} \right)^2 e^{i(n\pi/l)\xi} \\ c \sum_n u_n e^{i(n\pi/l)\xi} - \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} \left(\sum_n u_n e^{i(n\pi/l)\xi} \sum_n u_n e^{i(n\pi/l)\xi} \right) - \sum_n \zeta_n e^{i(n\pi/l)\xi} = \\ \frac{\rho_2 c \epsilon}{\rho_1} \mathcal{H} \left(\sum_n u_n \left(\frac{in\pi}{l} \right) e^{i(n\pi/l)\xi} \right) + \frac{c\epsilon^2}{6} \sum_n u_n \left(\frac{in\pi}{l} \right)^2 e^{i(n\pi/l)\xi}. \end{aligned}$$

Usando la linealidad de la transformada de Hilbert y aplicando la propiedad (1.5) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \left(\sum_n u_n e^{i(n\pi/l)\xi} \sum_n \zeta_n e^{i(n\pi/l)\xi} \right) = \sum_n \zeta_n \left(c + \frac{c\epsilon^2 \pi^2 n^2}{6l^2} \right) e^{i(n\pi/l)\xi} - \sum_n u_n e^{i(n\pi/l)\xi} \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} \left(\sum_n u_n e^{i(n\pi/l)\xi} \right)^2 = - \sum_n \zeta_n e^{i(n\pi/l)\xi} + \sum_n u_n \left(c + \frac{c\epsilon^2 \pi^2 n^2}{6l^2} + \frac{\rho_2 c \epsilon \pi |n|}{\rho_1 l} \right) e^{i(n\pi/l)\xi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{Z}$ se debe cumplir:

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (u \times \zeta)_n \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (u \times u)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2 n^2}{6l^2} \right) & -1 \\ -1 & c \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2 n^2}{6l^2} + \frac{\rho_2 \epsilon \pi |n|}{\rho_1 l} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_n \\ u_n \end{pmatrix}.$$

En esta última igualdad, $(u \times \zeta)_n$ y $(u \times u)_n$ representan los n -ésimos coeficientes de los productos

$$\sum_n u_n e^{i(n\pi/l)\xi} \sum_n \zeta_n e^{i(n\pi/l)\xi} \quad y \quad \sum_n u_n e^{i(n\pi/l)\xi} \sum_n u_n e^{i(n\pi/l)\xi},$$

respectivamente. En otras palabras,

$$(u \times \zeta)_n = \sum_k u_k \zeta_{n-k} \quad \text{y} \quad (u \times u)_n = \sum_k u_k u_{n-k}.$$

Si denotamos

$$D_n = \begin{pmatrix} c \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2 n^2}{6l^2}\right) & -1 \\ -1 & c \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2 n^2}{6l^2} + \frac{\rho_2 \epsilon \pi |n|}{\rho_1 l}\right) \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{pmatrix} \zeta_n \\ u_n \end{pmatrix} = D_n^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}(u \times \zeta)_n \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}}(u \times u)_n \end{pmatrix},$$

donde

$$D_n^{-1} = \frac{1}{\det D_n} \begin{pmatrix} c \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2 n^2}{6l^2} + \frac{\rho_2 \epsilon \pi |n|}{\rho_1 l}\right) & 1 \\ 1 & c \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2 n^2}{6l^2}\right) \end{pmatrix}.$$

Un cálculo sencillo muestra que

$$\begin{aligned} \det D_n &= c^2 \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2 n^2}{6l^2} + \frac{\rho_2 \epsilon \pi |n|}{\rho_1 l}\right) \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2 n^2}{6l^2}\right) - 1 \\ &= \left(\frac{c^2 \epsilon^4 \pi^4}{36l^4}\right) n^4 + \left(\frac{\rho_2 c^2 \epsilon^3 \pi^3}{6\rho_1 l^3}\right) |n|^3 + \left(\frac{c^2 \epsilon^2 \pi^2}{3l^2}\right) n^2 + \left(\frac{\rho_2 c^2 \epsilon \pi}{\rho_1 l}\right) |n| + (c^2 - 1). \end{aligned}$$

Para que la matriz D_n sea invertible es suficiente que $|c| > 1$.

Consideremos el espacio $X = l_2 \times l_2$ dotado con la norma usual

$$\|(\zeta, u)\|_X^2 = \|(\zeta_n, u_n)\|_X^2 := \|\zeta\|_2^2 + \|u\|_2^2.$$

Bajo estas condiciones, X es un espacio de Banach. Definamos el subconjunto $K \subset X$ por

$$K = \{(\zeta_n, u_n) \in X : (\zeta_n, u_n) = (\zeta_{-n}, u_{-n}), \zeta_0 \geq \zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \dots \geq 0, u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq 0\}.$$

Es fácil verificar que K es un cono en el espacio X . Observe que para $w = (\zeta, u) \in K$ se debe cumplir que si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\zeta_k = 0$, entonces $\zeta_n = 0$ para todo entero $|n| > k$. Una propiedad análoga cumple $u = (u_n)$.

Finalmente, para un elemento $w = (\zeta, u) \in X$, definimos el operador no lineal

$$(\mathcal{A}w)_n = D_n^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}(u \times \zeta)_n \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}}(u \times u)_n \end{pmatrix}.$$

Observación. En este punto, es importante resaltar que el problema de encontrar soluciones tipo ondas viajeras periódicas del sistema (2.6) se reduce a la búsqueda de puntos fijos no triviales del operador \mathcal{A} sobre un espacio apropiado. Un punto fijo trivial de \mathcal{A} es un punto fijo donde $\zeta_n = 0$, $u_n = 0$ para todo entero $n \neq 0$. En este orden de ideas, $w = (0, 0)$ y $w = (p^*, q^*)$ con $p^* = (\dots, 0, 0, p_0, 0, 0, \dots)$ y $q^* = (\dots, 0, 0, q_0, 0, 0, \dots)$ son puntos fijos triviales de \mathcal{A} .

2.2. Resultados principales

En esta sección establecemos que el operador no lineal \mathcal{A} tiene puntos fijos no triviales en el cono K usando la teoría del índice de punto fijo. Comenzamos demostrando algunos resultados útiles para el resto de la sección.

Consideremos $w = (\zeta, u)$ un elemento del espacio X y definamos

$$s_n := (\zeta \times u)_n = \sum_k \zeta_k u_{n-k} \quad \text{y} \quad t_n := (u \times u)_n = \sum_k u_k u_{n-k}.$$

La desigualdad (1.1) implica que

$$0 \leq s_n \leq \|\zeta\|_2 \|u\|_2 \quad \text{y} \quad 0 \leq t_n \leq \|u\|_2^2. \quad (2.12)$$

Por otra parte, denotemos por $D_n^{-1}(i, j)$ el elemento en la posición (i, j) de la matriz D_n^{-1} , entonces, para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} |D_n^{-1}(i, j)| &\leq \|D_n^{-1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 2} \sum_{j=1}^2 |D_n^{-1}(i, j)| \\ &= \frac{\left(c + \frac{c\epsilon^2\pi^2 n^2}{6l^2} + \frac{\rho_2 c \epsilon \pi |n|}{\rho_1 l} + 1\right)}{c^2 \left(1 + \frac{\epsilon^2\pi^2 n^2}{6l^2} + \frac{\rho_2 \epsilon \pi |n|}{\rho_1 l}\right) \left(1 + \frac{\epsilon^2\pi^2 n^2}{6l^2}\right) - 1} \\ &\leq \frac{36l^4(c+1)}{c^2\epsilon^4\pi^4 n^4} + \frac{6l^2}{c\epsilon^2\pi^2 n^2} + \frac{36l^3\rho_2}{\rho_1 c \epsilon \pi^3 |n|^3}. \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que

$$\sum_n \|D_n^{-1}\|_\infty^2 = \frac{1}{(c-1)^2} + \sum_{n \neq 0} \left| \frac{36l^4(c+1)}{c^2\epsilon^4 + \pi^4 n^4} + \frac{6l^2}{c\epsilon^2\pi^2 n^2} + \frac{36l^3\rho_2}{\rho_1 c \epsilon \pi^3 |n|^3} \right|^2 < \infty. \quad (2.13)$$

Note que la matriz D_n^{-1} cumple que para todo $n \geq 0$, $D_n^{-1} = D_{-n}^{-1}$ y sus entradas son decrecientes en $|n|$.

Con los resultados anteriores en mente, podemos afirmar que el operador no lineal \mathcal{A} está bien

definido sobre el espacio X . En efecto, como consecuencia de (2.12) y (2.13) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}w\|_X^2 &= \left\| D_n^{-1}(1,1) \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}(u \times \zeta)_n + D_n^{-1}(1,2) \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}}(u \times u)_n \right\|_2^2 + \\
&\quad + \left\| D_n^{-1}(2,1) \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}(u \times \zeta)_n + D_n^{-1}(2,2) \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}}(u \times u)_n \right\|_2^2 \\
&= \sum_n \left| D_n^{-1}(1,1) \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}(u \times \zeta)_n + D_n^{-1}(1,2) \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}}(u \times u)_n \right|^2 + \\
&\quad + \sum_n \left| D_n^{-1}(2,1) \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}(u \times \zeta)_n + D_n^{-1}(2,2) \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}}(u \times u)_n \right|^2 \\
&\leq 2 \sum_n \left| \left\| D_n^{-1} \right\|_\infty \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \|u\|_2 \|\zeta\|_2 + \left\| D_n^{-1} \right\|_\infty \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} \|u\|_2^2 \right|^2 \\
&= 2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \|u\|_2 \|\zeta\|_2 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} \|u\|_2^2 \right)^2 \sum_n \|D_n^{-1}\|_\infty^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Esto garantiza que $\|\mathcal{A}w\|_X$ está bien definido.

Consideremos ahora $w = (\zeta, u) \in K$. En este contexto, las desigualdades en (2.12) son naturalmente válidas. En adición, tenemos que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$s_{-n} = \sum_k \zeta_k u_{-n-k} = \sum_k \zeta_{-k} u_{-(n+k)} = \sum_k \zeta_{-k} u_{n+k} = \sum_k \zeta_k u_{n-k} = s_n \quad \text{y} \quad t_{-n} = t_n.$$

Similarmente, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$s_n = \sum_k \zeta_k u_{n-k} \geq \sum_k \zeta_k u_{n-k+1} = s_{n+1} \quad \text{y} \quad t_n \geq t_{n+1}. \quad (2.14)$$

El siguiente lema muestra algunas propiedades importantes del operador \mathcal{A} .

Lema 2.2.1 *El operador \mathcal{A} es positivo y compacto sobre el cono K .*

Demostración. Sea $w = (\zeta, u) = (\zeta_n, u_n) \in K$. Para probar que \mathcal{A} es un operador positivo, observe que para todo $n \geq 0$,

$$(\mathcal{A}w)_n = D_n^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}(u \times \zeta)_n \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}}(u \times u)_n \end{pmatrix} = D_{-n}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}(u \times \zeta)_{-n} \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}}(u \times u)_{-n} \end{pmatrix} = (\mathcal{A}w)_{-n}.$$

Las desigualdades en (2.14) y el hecho de que las entradas de D_n^{-1} son decrecientes en $|n|$ implican que

$$(\mathcal{A}w)_n \geq (\mathcal{A}w)_{n+1}.$$

Esto implica que $\mathcal{A}(K) \subset K$, y por tanto el operador \mathcal{A} es positivo.

Por otra parte, sean $w = (\zeta, u)$ y $\bar{w} = (\bar{\zeta}, \bar{u})$ elementos de K . La desigualdad (1.1) implica que

$$\begin{aligned}
|(u \times \zeta)_n - (\bar{u} \times \bar{\zeta})_n| &= \left| \sum_k u_k \zeta_{n-k} - \bar{u}_k \bar{\zeta}_{n-k} \right| \\
&= \left| \sum_k u_k (\zeta_{n-k} - \bar{\zeta}_{n-k}) + \bar{\zeta}_{n-k} (u_k - \bar{u}_k) \right| \\
&\leq \sum_k |u_k| |\zeta_{n-k} - \bar{\zeta}_{n-k}| + \sum_k |\bar{\zeta}_{n-k}| |u_k - \bar{u}_k| \\
&\leq \|u\|_2 \|\zeta - \bar{\zeta}\|_2 + \|\bar{\zeta}\|_2 \|u - \bar{u}\|_2.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$|(u \times u)_n - (\bar{u} \times \bar{u})_n| \leq \|u - \bar{u}\|_2 (\|u\|_2 + \|\bar{u}\|_2).$$

De las desigualdades anteriores, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}w - \mathcal{A}\bar{w}\|_X^2 &= \\
&= \sum_n \left| D_n^{-1}(1, 1) \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} ((u \times \zeta)_n - (\bar{u} \times \bar{\zeta})_n) + D_n^{-1}(1, 2) \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} ((u \times u)_n - (\bar{u} \times \bar{u})_n) \right|^2 + \\
&\quad + \sum_n \left| D_n^{-1}(2, 1) \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} ((u \times \zeta)_n - (\bar{u} \times \bar{\zeta})_n) + D_n^{-1}(2, 2) \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} ((u \times u)_n - (\bar{u} \times \bar{u})_n) \right|^2 \\
&\leq 2 \sum_n \left[\|D_n^{-1}\|_\infty \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \left(\|\zeta - \bar{\zeta}\|_2 \|u\|_2 + \frac{1}{2} \|u - \bar{u}\|_2 (\|u\|_2 + \|\bar{u}\|_2 + 2 \|\bar{\zeta}\|_2) \right) \right]^2 \\
&= 2 \left[\|\zeta - \bar{\zeta}\|_2 \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \|u\|_2 + \|u - \bar{u}\|_2 \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (2 \|\zeta\|_2 + \|u\|_2 + \|\bar{u}\|_2) \right]^2 \sum_n \|D_n^{-1}\|_\infty^2.
\end{aligned}$$

Esto muestra que \mathcal{A} es un operador continuo en el punto $\bar{w} = (\bar{\zeta}, \bar{u}) \in K$.

Para demostrar que el operador \mathcal{A} es compacto consideremos un conjunto \mathcal{M} acotado de X , esto es,

$$\mathcal{M} \subset \{w = (\zeta, u) \in X : \|w\|_X \leq B\}.$$

Para cada $N \in \mathbb{N}$ definimos el operador

$$(\mathcal{A}_N w)_n = \begin{cases} (\mathcal{A}w)_n & \text{si } -N \leq n \leq N, \\ 0 & \text{si } |n| > N. \end{cases}$$

Para cada $N \in \mathbb{N}$, el operador \mathcal{A}_N tiene rango finito $2N + 1$ y es continuo debido a la

continuidad de \mathcal{A} . Por otra parte, si $w = (\zeta, u) \in \mathcal{M}$ y definimos $(v_n, z_n) := (\mathcal{A}w)_n$, entonces

$$\begin{aligned} |v_n| &= \left| D_n^{-1}(1, 1) \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (u \times \zeta)_n + D_n^{-1}(1, 2) \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (u \times u)_n \right| \\ &\leq \|D_n^{-1}\|_\infty \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \|u\|_2 \|\zeta\|_2 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} \|u\|_2^2 \right). \end{aligned}$$

Similarmente, para z_n tenemos la desigualdad:

$$|z_n| \leq \|D_n^{-1}\|_\infty \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \|u\|_2 \|\zeta\|_2 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} \|u\|_2^2 \right).$$

Como consecuencia de las desigualdades anteriores tenemos:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_N w - \mathcal{A}w\|_X^2 &= \|(v_n)_{|n|>N}\|_2^2 + \|(z_n)_{|n|>N}\|_2^2 \\ &= \sum_{|n|>N} |v_n|^2 + \sum_{|n|>N} |z_n|^2 \\ &\leq 2 \sum_{|n|\geq N} \|D_n^{-1}\|_\infty^2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \|u\|_2 \|\zeta\|_2 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} \|u\|_2^2 \right)^2 \\ &\leq 2 \frac{\alpha^2}{\rho} \left(\|u\|_2 \|\zeta\|_2 + \frac{1}{2} \|u\|_2^2 \right)^2 \left(\sum_{|n|\geq N} \|D_n^{-1}\|_\infty^2 \right). \end{aligned}$$

Si definimos las constantes γ_N y γ por

$$\gamma = \left(\sum_n \|D_n^{-1}\|_\infty^2 \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \gamma_N = \left(\sum_{|n|\geq N} \|D_n^{-1}\|_\infty^2 \right)^{1/2}. \quad (2.15)$$

Entonces,

$$\|\mathcal{A}_N w - \mathcal{A}w\|_X^2 \leq \sup_{w \in M} \|\mathcal{A}_N w - \mathcal{A}w\|_X^2 \leq \frac{9\alpha^2 B^4 \gamma_N^2}{2\rho} \leq \frac{9\alpha^2 B^4 \gamma^2}{2\rho}.$$

Dado que $\gamma_N \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, entonces $\sup_{w \in M} \|\mathcal{A}_N w - \mathcal{A}w\|_X^2 \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$. Por lo tanto, \mathcal{A} es un operador compacto puesto que es el límite uniforme de operadores continuos de rango finito (ver Teorema 1.2.16). Esto concluye la demostración.

Los siguientes dos lemas establecen una región contenida en el cono K en la que es factible encontrar puntos fijos no triviales del operador no lineal \mathcal{A} .

Lema 2.2.2 *Sea γ definido como en (2.15). Entonces para r suficientemente pequeño tal que satisfaga*

$$0 < r < r_0 := \min \left\{ \frac{\sqrt{2\rho}}{3} \alpha^{-1} \gamma^{-1}, \|(p^*, q^*)\|_X \right\}.$$

Se cumple que $w \neq t\mathcal{A}w$ para todo $w \in \partial K_r$ y todo $t \in [0, 1]$.

Demostración. Utilizando un argumento indirecto, supongamos que existen $w = (\zeta, u) = (\zeta_n, u_n) \in \partial K_r$ y $t \in [0, 1]$, tal que

$$w = t\mathcal{A}w.$$

Entonces,

$$r^2 = \|w\|_X^2 = \|t\mathcal{A}w\|_X^2 \leq \|\mathcal{A}w\|_X^2 = \|(v_n)\|_2^2 + \|(z_n)\|_2^2,$$

donde v_n y z_n son como en el Lema anterior. De esta manera,

$$\begin{aligned} r^2 &\leq \sum_n |v_n|^2 + \sum_n |z_n|^2 \\ &\leq \frac{2\alpha^2}{\rho} \left(\|u\|_2 \|\zeta\|_2 + \frac{1}{2} \|u\|_2^2 \right)^2 \left(\sum_n \|D_n^{-1}\|_\infty^2 \right) \\ &\leq \frac{2\alpha^2\gamma^2}{\rho} \left(r^2 + \frac{1}{2}r^2 \right)^2 \\ &\leq \frac{9\alpha^2\gamma^2r^4}{2\rho}. \end{aligned}$$

Esto implica que $r \geq \frac{\sqrt{2\rho}}{3}\alpha^{-1}\gamma^{-1}$, lo que contradice la escogencia de r .

Lema 2.2.3 Para cualquier número real $R > 0$ que satisfaga

$$R > R_0 := \max \left\{ \frac{2\sqrt{2\rho}(c^2 - 1)}{\alpha c} ((c^2 - 1)\gamma + \beta), \|(p^*, q^*)\|_X \right\},$$

con

$$\beta = \left(\sum_n \frac{1}{(1 + n^2)^2} \right)^{1/2}.$$

Existe $\bar{w} \in K$ no nulo tal que $w - \mathcal{A}w \neq \lambda\bar{w}$ para todo $w \in \partial K_R$ y $\lambda \geq 0$.

Demostración. Sea $\bar{w} = (\bar{\zeta}, \bar{u}) = (\bar{\zeta}_n, \bar{u}_n)$ definido por

$$\begin{pmatrix} \bar{\zeta}_n \\ \bar{u}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + n^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un cálculo directo muestra que $\bar{w} \in K$. Supongamos que existen $w = (\zeta, u) \in \partial K_R$ y $\lambda \geq 0$ tal que

$$w - \mathcal{A}w = \lambda\bar{w}.$$

Entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\begin{pmatrix} \zeta_n \\ u_n \end{pmatrix} = D_n^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}(u \times \zeta)_n \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}}(u \times u)_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \bar{\zeta}_n \\ \bar{u}_n \end{pmatrix}.$$

En particular, para $n = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= \frac{1}{\det D_0} \left(\frac{\alpha c}{\sqrt{\rho}} (u \times \zeta)_0 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (u \times u)_0 \right) + \lambda \bar{\zeta}_0 \\ u_0 &= \frac{1}{\det D_0} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (u \times \zeta)_0 + \frac{\alpha c}{2\sqrt{\rho}} (u \times u)_0 \right) + \lambda \bar{u}_0.\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\zeta_0 = \frac{1}{c^2 - 1} \left(\frac{\alpha c}{\sqrt{\rho}} \sum_k u_k \zeta_{-k} + \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} \sum_k u_k^2 \right) + \lambda \quad (2.16)$$

$$u_0 = \frac{1}{c^2 - 1} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \sum_k u_k \zeta_{-k} + \frac{\alpha c}{2\sqrt{\rho}} \sum_k u_k^2 \right) + \lambda. \quad (2.17)$$

Observe que si $\zeta_0 = 0$, entonces $\zeta_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y la igualdad (2.16) toma la forma

$$0 = \frac{1}{c^2 - 1} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} \sum_k u_k^2 \right) + \lambda,$$

se sigue que, $\lambda = 0$ y $u_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ debido a que $\lambda \geq 0$ y $u_0 \geq 0$. Similarmente, si suponemos que $u_0 = 0$, entonces $u_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y la igualdad (2.17) implica que $\lambda = 0$. Sustituyendo esto en (2.16) obtenemos como resultado que $\zeta_0 = 0$, lo que implica que $\zeta_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. En resumen, dado que $w = 0 \notin \partial K_R$, concluimos que $\zeta_0 \neq 0$ y $u_0 \neq 0$.

Por otra parte, de la igualdad (2.17) se sigue que

$$u_0 \geq \frac{1}{c^2 - 1} \left(\frac{\alpha c}{2\sqrt{\rho}} u_0^2 \right).$$

En consecuencia,

$$1 \geq \frac{\alpha c}{2\sqrt{\rho}(c^2 - 1)} u_0.$$

Debido a que $u_0 \geq \lambda$, tenemos que

$$0 \leq \lambda \leq u_0 \leq \frac{2\sqrt{\rho}(c^2 - 1)}{\alpha c}. \quad (2.18)$$

Pero ademas, la igualdad (2.17) implica que

$$u_0 \geq \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}(c^2 - 1)} u_0 \zeta_0.$$

De donde,

$$1 \geq \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}(c^2 - 1)} \zeta_0.$$

Por lo tanto,

$$0 < \zeta_0 \leq \frac{\sqrt{\rho}(c^2 - 1)}{\alpha}. \quad (2.19)$$

Ahora, teniendo en cuenta las desigualdades en (2.14), se sigue que

$$\begin{aligned} \zeta_n &= \left(D_n^{-1}(1, 1) \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (u \times \zeta)_n + D_n^{-1}(1, 2) \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (u \times u)_n \right) + \frac{\lambda}{1 + n^2} \\ &\leq \|D_n^{-1}\|_{\infty} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (u \times \zeta)_n + \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (u \times u)_n \right) + \frac{\lambda}{1 + n^2} \\ &\leq \|D_n^{-1}\|_{\infty} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (u \times \zeta)_0 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (u \times u)_0 \right) + \frac{\lambda}{1 + n^2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Observe que la igualdad (2.17) implica:

$$u_0 = \frac{1}{c^2 - 1} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (u \times \zeta)_0 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (u \times u)_0 \right) + \lambda \geq \frac{1}{c^2 - 1} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (u \times \zeta)_0 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (u \times u)_0 \right),$$

y con ayuda de la igualdad (2.18), tenemos que:

$$\frac{1}{c^2 - 1} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (u \times \zeta)_0 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (u \times u)_0 \right) \leq u_0 \leq \frac{2\sqrt{\rho}(c^2 - 1)}{\alpha c}.$$

Se sigue que,

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (u \times \zeta)_0 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (u \times u)_0 \leq \frac{2\sqrt{\rho}(c^2 - 1)^2}{\alpha c}. \quad (2.21)$$

Para ζ_n , las ecuaciones (2.18), (2.20) y (2.21) implican que:

$$\zeta_n \leq \|D_n^{-1}\|_{\infty} \left(\frac{2\sqrt{\rho}(c^2 - 1)^2}{\alpha c} \right) + \frac{2\sqrt{\rho}(c^2 - 1)}{\alpha c} \frac{1}{1 + n^2}.$$

Similarmente, u_n cumple la desigualdad:

$$u_n \leq \|D_n^{-1}\|_{\infty} \left(\frac{2\sqrt{\rho}(c^2 - 1)^2}{\alpha c} \right) + \frac{2\sqrt{\rho}(c^2 - 1)}{\alpha c} \frac{1}{1 + n^2}.$$

Del hecho de que $w = (\zeta, u) \in \partial K_R$, deducimos que

$$\begin{aligned} R^2 &= \sum_n |\zeta_n|^2 + \sum_n |u_n|^2 \\ &\leq 2 \sum_n \left(\|D_n^{-1}\|_{\infty} \left(\frac{2\sqrt{\rho}(c^2 - 1)^2}{\alpha c} \right) + \frac{2\sqrt{\rho}(c^2 - 1)}{\alpha c} \frac{1}{1 + n^2} \right)^2 \\ &= \frac{8\rho(c^2 - 1)^2}{\alpha^2 c^2} \sum_n \left(\|D_n^{-1}\|_{\infty} (c^2 - 1) + \frac{1}{1 + n^2} \right)^2 \end{aligned}$$

La desigualdad (1.2) implica que

$$\leq \frac{8\rho(c^2-1)^2}{\alpha^2 c^2} \left(\left(\sum_n (c^2-1)^2 \|D_n^{-1}\|_\infty^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_n \left(\frac{1}{1+n^2} \right)^2 \right)^{1/2} \right)^2.$$

Por lo tanto,

$$R \leq \frac{2\sqrt{2\rho}(c^2-1)}{\alpha c} \left((c^2-1) \left(\sum_n \|D_n^{-1}\|_\infty^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_n \left(\frac{1}{1+n^2} \right)^2 \right)^{1/2} \right).$$

Teniendo en cuenta que $\gamma = \left(\sum_n \|D_n^{-1}\|_\infty^2 \right)^{1/2}$ y $\beta = \left(\sum_n \left(\frac{1}{1+n^2} \right)^2 \right)^{1/2}$, se sigue que

$$R \leq \frac{2\sqrt{2\rho}(c^2-1)}{\alpha c} ((c^2-1)\gamma + \beta).$$

Esto contradice la escogencia del radio R .

A continuación establecemos la existencia de un punto fijo del operador no lineal \mathcal{A} en el segmento del cono $K_r^R := \{w \in K : r < \|w\|_X < R\}$ usando el índice de punto fijo. Observe que en términos de lo discutido en la Sección 1.2 del Capítulo 1, la terna (K, \mathcal{A}, K_r^R) es admisible.

Teorema 2.2.4 *Si r y R son como los definidos en los Lemas (2.2.2) y (2.2.3), respectivamente. Entonces el índice de punto fijo del operador \mathcal{A} en K_r^R es*

$$i(K, \mathcal{A}, K_r^R) = -1.$$

Demostración. De los Lemas 1.2.23 y 2.2.2 tenemos que

$$i(K, \mathcal{A}, K_r) = 1.$$

Por otra parte, de los Lemas 1.2.24 y 2.2.3 se sigue que

$$i(K, \mathcal{A}, K_R) = 0.$$

Debido a que no hay puntos fijos de \mathcal{A} en ∂K_r , la propiedad de aditividad del índice de punto fijo implica que

$$i(K, \mathcal{A}, K_r^R) = i(K, \mathcal{A}, K_R) - i(K, \mathcal{A}, K_r) = 0 - 1 = -1.$$

Observación. Es importante notar que el punto fijo trivial (p^*, q^*) pertenece al conjunto K_r^R y es independiente de la escogencia del periodo $2l$. En el siguiente Lema establecemos la existencia de un punto fijo no trivial del operador \mathcal{A} en K_r^R . Para esto definamos los conjuntos

$$K_\delta(p^*, q^*) := \{w = (\zeta, u) \in K : \|(\zeta, u) - (p^*, q^*)\|_X < \delta\},$$

$$\partial K_\delta(p^*, q^*) := \{w = (\zeta, u) \in K : \|(\zeta, u) - (p^*, q^*)\|_X = \delta\}.$$

Lema 2.2.5 *Si (p^*, q^*) es el único punto fijo del operador \mathcal{A} en K_r^R , entonces cuando l se escoge suficientemente grande y δ suficientemente pequeño, se tiene que*

$$i(K, A, K_\delta(p^*, q^*)) = 0.$$

Demostración. Debido al Lema 1.2.25, es suficiente con mostrar que los conjuntos

$$(I - \mathcal{A})\partial K_\delta(p^*, q^*) \quad \text{y} \quad \{\lambda \bar{w} : \lambda > 0\}$$

son disjuntos, donde $\bar{w} \in K$ como es definido en el lema 2.2.3. Supongamos que existe $w = (\zeta, u) \in \partial K_\delta(p^*, q^*)$ y $\lambda \geq$ tal que

$$w - \mathcal{A}w = \lambda \bar{w}.$$

Para todo $n \in \mathbb{Z}$ se cumple:

$$\begin{pmatrix} \zeta_n \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det D_n} \begin{pmatrix} c \left(1 + \frac{\epsilon^2 n^2 \pi^2}{6l^2} + \frac{\rho_2 \epsilon \pi |n|}{\rho_1 l} \right) & 1 \\ 1 & c \left(1 + \frac{\epsilon^2 n^2 \pi^2}{6l^2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (u \times \zeta)_n \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (u \times u)_n \end{pmatrix} + \lambda \bar{w} \quad (2.22)$$

Para $n = 1$, la ecuación (2.22) toma la forma:

$$\zeta_1 = \frac{1}{\det D_1} \left(c \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2}{6l^2} + \frac{\rho_2 \epsilon \pi}{\rho_1 l} \right) \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (u \times \zeta)_1 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (u \times u)_1 \right) + \frac{\lambda}{2}$$

$$u_1 = \frac{1}{\det D_1} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (u \times \zeta)_1 + c \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2}{6l^2} \right) \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (u \times u)_1 \right) + \frac{\lambda}{2}.$$

Se sigue que

$$\zeta_1 \geq \frac{1}{\det D_1} \left(c \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2}{6l^2} \right) \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (u_0 \zeta_1 + u_1 \zeta_0) + \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (u_0 u_1 + u_1 u_0) \right) + \frac{\lambda}{2}$$

$$u_1 \geq \frac{1}{\det D_1} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (u_0 \zeta_1 + u_1 \zeta_0) + c \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2}{6l^2} \right) \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}} (u_0 u_1 + u_1 u_0) \right) + \frac{\lambda}{2}.$$

Si $A := \frac{\alpha c}{\sqrt{\rho} \det D_1} \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2}{6l^2} \right)$ y $B := \frac{\alpha}{\sqrt{\rho} \det D_1}$, obtenemos que

$$\zeta_1 \geq A(u_0 \zeta_1 + u_1 \zeta_0) + B(u_0 u_1) + \frac{\lambda}{2}$$

$$u_1 \geq B(u_0 \zeta_1 + u_1 \zeta_0) + A(u_0 u_1) + \frac{\lambda}{2}. \quad (2.23)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\zeta_1 + u_1 &\geq A(u_0\zeta_1 + u_1\zeta_0) + B(u_0u_1) + B(u_0\zeta_1 + u_1\zeta_0) + A(u_0u_1) + \lambda \\
&= Au_0(\zeta_1 + u_1) + Bu_0(\zeta_1 + u_1) + Au_1\zeta_0 + Bu_1\zeta_0 + \lambda \\
&= (A + B)u_0(\zeta_1 + u_1) + (A + B)(u_1\zeta_0) + \lambda.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Dado que $w \in \partial K_\delta(p^*, q^*)$, entonces, puede ser escrito de la forma

$$w = (\zeta, u) = (p^*, q^*) + \delta(\tilde{\zeta}, \tilde{u}),$$

donde $\|(\tilde{\zeta}, \tilde{u})\|_X = 1$. Observe que para $n = 0$,

$$\zeta_0 = p_0 + \delta\tilde{\zeta}_0 \quad \text{y} \quad u_0 = q_0 + \delta\tilde{u}_0,$$

y para $|n| \geq 1$, se tiene que

$$\tilde{\zeta}_n = \frac{\zeta_n}{\delta} \quad \text{y} \quad \tilde{u}_n = \frac{u_n}{\delta}.$$

Sustituyendo las igualdades anteriores en (2.24) obtenemos

$$\delta(\tilde{\zeta}_1 + \tilde{u}_1) \geq (A + B)\delta(q_0 + \delta\tilde{u}_0)(\tilde{\zeta}_1 + \tilde{u}_1) + (A + B)\delta\tilde{u}_1(p_0 + \delta\tilde{\zeta}_0) + \lambda. \tag{2.25}$$

Ahora note que

$$\begin{aligned}
A + B &= \frac{\alpha c}{\sqrt{\rho} \det D_1} \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2}{6l^2} \right) + \frac{\alpha}{\sqrt{\rho} \det D_1} \\
&= \frac{\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \left(c \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2}{6l^2} \right) + 1 \right)}{\left(\frac{c^2 \epsilon^4 \pi^4}{36l^4} \right) + \left(\frac{\rho_2 c^2 \epsilon^3 \pi^3}{6\rho_1 l^3} \right) + \left(\frac{c^2 \epsilon^2 \pi^2}{3l^2} \right) + \left(\frac{\rho_2 c^2 \epsilon \pi}{\rho_1 l} \right) + (c^2 - 1)}.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
(A + B)^{-1} &= \frac{\left(\frac{c^2 \epsilon^4 \pi^4}{36l^4} \right) + \left(\frac{\rho_2 c^2 \epsilon^3 \pi^3}{6\rho_1 l^3} \right) + \left(\frac{c^2 \epsilon^2 \pi^2}{3l^2} \right) + \left(\frac{\rho_2 c^2 \epsilon \pi}{\rho_1 l} \right) + (c^2 - 1)}{\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \left(c \left(1 + \frac{\epsilon^2 \pi^2}{6l^2} \right) + 1 \right)} \\
&< \frac{\left(\frac{c^2 \epsilon^4 \pi^4}{36l^4} \right) + \left(\frac{\rho_2 c^2 \epsilon^3 \pi^3}{6\rho_1 l^3} \right) + \left(\frac{c^2 \epsilon^2 \pi^2}{3l^2} \right) + \left(\frac{\rho_2 c^2 \epsilon \pi}{\rho_1 l} \right) + (c + 1)(c - 1)}{\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (c + 1)} \\
&= \frac{\sqrt{\rho}(c - 1)}{\alpha} + \frac{\left(\frac{c^2 \epsilon^4 \pi^4}{36l^4} \right) + \left(\frac{\rho_2 c^2 \epsilon^3 \pi^3}{6\rho_1 l^3} \right) + \left(\frac{c^2 \epsilon^2 \pi^2}{3l^2} \right) + \left(\frac{\rho_2 c^2 \epsilon \pi}{\rho_1 l} \right)}{\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (c + 1)}.
\end{aligned}$$

A partir de la desigualdad (2.10), si $l > 0$ es escogido suficientemente grande tal que garantice que

$$\frac{\sqrt{\rho}(c - 1)}{\alpha} + \frac{\left(\frac{c^2 \epsilon^4 \pi^4}{36l^4} \right) + \left(\frac{\rho_2 c^2 \epsilon^3 \pi^3}{6\rho_1 l^3} \right) + \left(\frac{c^2 \epsilon^2 \pi^2}{3l^2} \right) + \left(\frac{\rho_2 c^2 \epsilon \pi}{\rho_1 l} \right)}{\frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} (c + 1)} < q_0,$$

se tiene que

$$p_0 > q_0 > (A + B)^{-1} > 0.$$

Además, el número $\delta > 0$ puede ser escogido lo suficientemente pequeño de tal manera que

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= p_0 + \delta \tilde{\zeta}_0 > (A + B)^{-1} > 0 \\ u_0 &= q_0 + \delta \tilde{u}_0 > (A + B)^{-1} > 0.\end{aligned}$$

Esto, junto con la ecuación (2.25) implican que

$$\delta(\tilde{\zeta}_1 + \tilde{u}_1) \geq (A + B)\delta(A + B)^{-1}(\tilde{\zeta}_1 + \tilde{u}_1) + (A + B)\delta\tilde{u}_1(A + B)^{-1} + \lambda.$$

Luego,

$$0 \geq \delta\tilde{u}_1 + \lambda.$$

Puesto que $\tilde{u}_1 \geq 0$ y $\lambda \geq 0$, concluimos que

$$\tilde{u}_1 = \lambda = 0, \tag{2.26}$$

y por lo tanto, $\tilde{u}_n = 0$ para todo $n \neq 0$. Más aún, la ecuación (2.22) para $n = 0$ luce así

$$\begin{pmatrix} \zeta_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2 - 1} \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}(u \times \zeta)_0 \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}}(u \times u)_0 \end{pmatrix}.$$

La igualdad (2.26) implica que

$$(u \times \zeta)_0 = \sum_k u_k \zeta_{-k} = u_0 \zeta_0 \quad \text{y} \quad (u \times u)_0 = \sum_k u_k u_{-k} = u_0^2.$$

Como consecuencia tenemos que

$$\zeta_0 = \frac{\alpha c}{\sqrt{\rho}(c^2 - 1)} u_0 \zeta_0 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}(c^2 - 1)} u_0^2 \tag{2.27}$$

$$u_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}(c^2 - 1)} u_0 \zeta_0 + \frac{\alpha c}{2\sqrt{\rho}(c^2 - 1)} u_0^2. \tag{2.28}$$

Despejando el término $\frac{\alpha}{2\sqrt{\rho}(c^2 - 1)} u_0^2$ de (2.27) y sustituyéndolo en (2.28) obtenemos

$$\zeta_0 = \frac{u_0}{c - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} u_0},$$

o equivalentemente,

$$\zeta_0 = \frac{\sqrt{\rho}(c\zeta_0 - u_0)}{\alpha u_0}. \tag{2.29}$$

Similarmente, el sustituir (2.29) en (2.28) da como resultado la ecuación

$$\frac{\alpha^2}{2\rho}u_0^2 - \frac{3\alpha c}{2\sqrt{\rho}}u_0 + c^2 - 1 = 0$$

En resumen, ζ_0 y u_0 satisfacen

$$\zeta_0 = \frac{u_0}{c - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}}u_0} \quad \text{y} \quad \frac{\alpha^2}{2\rho}u_0^2 - \frac{3\alpha c}{2\sqrt{\rho}}u_0 + c^2 - 1 = 0. \quad (2.30)$$

Al comparar las igualdades en (2.9) y (2.30) concluimos que ζ_0 y u_0 satisfacen las mismas ecuaciones que p_0 y q_0 , respectivamente. Por lo tanto, debemos tener que $\zeta_0 = p_0 > 0$ y $u_0 = q_0 > 0$ y además, $\tilde{\zeta}_0 = \tilde{u}_0 = 0$.

Por otra parte, la ecuación (2.23) implica que $0 = u_1 = \delta\tilde{u}_1 \geq Bu_0\zeta_1$, y esto implica que $0 = \zeta_1 = \tilde{\zeta}_n$ para todo $n \neq 0$ debido a que A, B y u_0 son positivos. De esto se sigue que $\tilde{\zeta}_1 = \frac{\zeta_1}{\delta} = 0$ y por tanto, $\tilde{\zeta}_1 = \tilde{\zeta}_n = 0$ para todo $n \neq 0$. Es decir, se ha probado que $\tilde{u}_n = \tilde{\zeta}_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, lo que contradice el hecho de que $w = (\zeta, u) = (p^*, q^*) + \delta(\tilde{\zeta}, \tilde{u}) \in \partial K_\delta(p^*, q^*)$.

Teorema 2.2.6 *Si $c > 1$ y el semiperiodo l es escogido suficientemente grande, entonces el operador \mathcal{A} tiene un punto fijo no trivial $\bar{w} = (\bar{\zeta}, \bar{u})$ en el segmento de cono K_r^R .*

Demostración. La existencia del punto fijo no trivial del operador \mathcal{A} se sigue del Teorema 2.2.4 y el Lema 2.2.5.

Observación. Las funciones

$$\bar{\zeta}(x, t) = \bar{\zeta}(x - ct) = \sum_n \bar{\zeta}_n e^{i(n\pi/l)(x-ct)}, \quad \bar{u}(x, t) = \bar{u}(x - ct) = \sum_n \bar{u}_n e^{i(n\pi/l)(x-ct)}$$

corresponden a una solución tipo onda viajera periódica no trivial del sistema original (2.2). Note también, que el rango de la velocidad para la existencia de ondas viajeras del sistema (2.2) es $c > \sqrt{\rho}$, debido al reescale introducido en (2.3). Más aún, observe que si $(\bar{\zeta}(x - ct), \bar{u}(x - ct))$ es una solución del sistema (2.2), entonces $(\bar{\zeta}(x + ct), -\bar{u}(x + ct))$ es también una solución. Esto es, la existencia de soluciones tipo onda viajera periódica para $c > \sqrt{\rho}$, implican la existencia de este tipo de soluciones para $c < -\sqrt{\rho}$. En consecuencia, queda probado el siguiente resultado:

Teorema 2.2.7 *Si $|c| > \sqrt{\rho}$, donde $\rho = \rho_2/\rho_1 - 1$ y el semiperiodo $l > 0$ es suficientemente grande, entonces el sistema (1) tiene al menos una solución tipo onda viajera periódica no trivial.*

Capítulo 3

Aproximación de soluciones tipo ondas viajeras periódicas

A excepción de algunas ecuaciones cuyas soluciones del tipo onda viajera periódica se conocen de manera explícita, en la búsqueda general de este tipo de soluciones, surgen dificultades que sólo conllevan a demostrar, en algunos casos, la existencia de ellas. En este capítulo aproximamos estas soluciones utilizando un esquema numérico pseudoespectral, basado en una descomposición de Fourier, la cual es una técnica adecuada en el marco periódico-espacial. Observe que una solución tipo onda viajera (ζ, u) del sistema (1) debe satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{c\epsilon^2}{6}\zeta'' - c\zeta - u + \alpha u\zeta &= 0, \\ \frac{c\epsilon^2}{6}u'' + \frac{\rho_2}{\rho_1}c\epsilon\mathcal{H}(u') - cu + \frac{\alpha}{2}u^2 - \rho\zeta &= 0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $\rho = \rho_2/\rho_1 - 1$. Estamos interesados en encontrar aproximaciones a soluciones pares (ζ, u) de periodo $2l$, $l > 0$, del sistema (1); para esto introducimos la expansión en coseno truncada para ζ y u :

$$\begin{aligned}\zeta(x) &\approx \sum_{n=0}^{N/2} \zeta_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \\ u(x) &\approx \sum_{n=0}^{N/2} u_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right),\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= \frac{1}{l} \int_0^l \zeta(x) dx = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} \zeta(x) dx, \\ \zeta_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \zeta(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = \frac{2}{2l} \int_0^{2l} \zeta(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx,\end{aligned}\tag{3.3}$$

y expresiones análogas para u . Sustituyendo las expresiones en (3.2) en (3.1) y evaluándolas en los $N/2 + 1$ puntos de colocación

$$x_j = \frac{2l(j-1)}{N}, \quad j = 1, \dots, N/2 + 1,$$

y usando la propiedad (1.5) de la transformada de Hilbert obtenemos un sistema de $N + 2$ ecuaciones no lineales de la forma:

$$F(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{N/2}, u_0, u_1, \dots, u_{N/2}) = 0. \quad (3.4)$$

Es importante anotar que los $N + 2$ coeficientes ζ_n, u_n son desconocidos. El sistema no lineal (3.4) puede ser resuelto por el método de iteración de Newton. El cálculo computacional de las series en coseno de (3.2) y las integrales en (3.3) es realizado usando el algoritmo FFT (Fast Fourier Transform). El Jacobiano del campo vectorial $F : \mathbb{R}^{N+2} \rightarrow \mathbb{R}^{N+2}$ es aproximado por la fórmula de segundo grado de exactitud

$$J_{i,j}F(x) \approx \frac{F_i(x + he_j) - F_i(x - he_j)}{2h}, \quad j = 1, 2, \dots, N/2,$$

donde $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ y $h = 0,01$. Detenemos la iteración de Newton cuando el error relativo entre dos aproximaciones sucesivas y el valor del campo escalar F es menor que 10^{-12} .

3.1. Descripción de los experimentos numéricos

En esta sección empleamos el esquema numérico explicado al principio de este capítulo, para calcular aproximaciones de algunas soluciones tipo ondas viajeras del sistema (1). En todos los experimentos usamos el algoritmo FFT con $N = 2^{10}$ puntos de colocación. En primer lugar, tomamos los parámetros $\alpha = \epsilon = 1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$, la velocidad de onda $c = 1,5$ y los datos iniciales dados a continuación:

$$\zeta_0(x) = 5 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad u_0(x) = 5 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (3.5)$$

$$\zeta_0(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad u_0(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (3.6)$$

$$\zeta_0(x) = -\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad u_0(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (3.7)$$

Para el dato inicial (3.5) se tomó el semiperiodo $l = 2$ y el dominio computacional $[0, 4]$. El método de Newton converge tras ocho iteraciones y los resultados son presentados en la Figura 3.1. En las Figuras 3.2 y 3.3, mostramos las aproximaciones a ondas periódicas viajeras obtenidas al utilizar como dato inicial los perfiles de onda en (3.6) y considerando los semiperiodos $l = 10$ y $l = 20$. En este caso, los dominios computacionales son $[0, 20]$ y $[0, 40]$ y el algoritmo converge en siete y diez iteraciones respectivamente. Por último, necesitamos siete iteraciones del algoritmo para obtener convergencia usando el dato inicial en (3.7) con

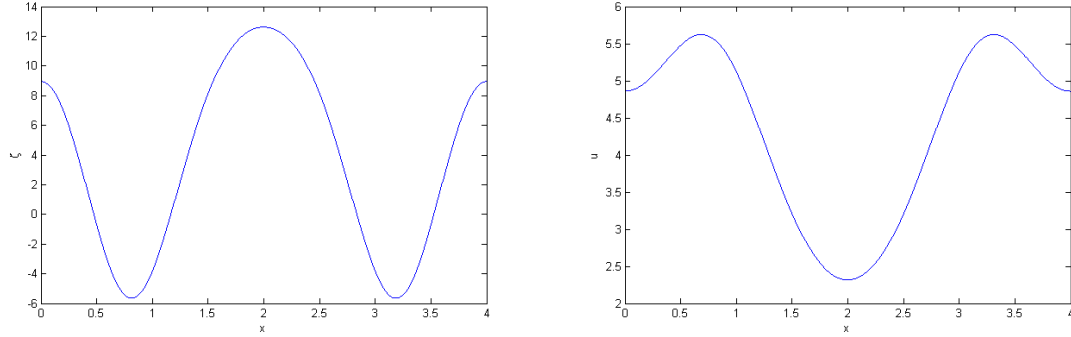


Figura 3.1: Soluciones tipo ondas viajeras periódicas computadas por 8 iteraciones del algoritmo, 2^{10} puntos de colocación, semiperiodo $l = 2$ y perfil de onda (3.5).

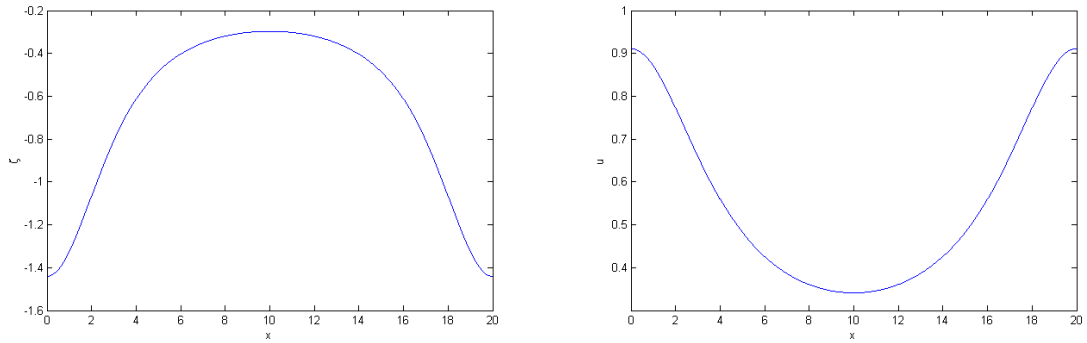


Figura 3.2: Soluciones tipo ondas viajeras periódicas computadas por 7 iteraciones del algoritmo, 2^{10} puntos de colocación, semiperiodo $l = 10$ y perfil de onda (3.6).

$l = 15$. De esta manera, el dominio computacional es $[0, 30]$ y el resultado se ilustra en la Figura 3.4.

Es importante anotar que en [19], se verificó que las aproximaciones halladas en los experimentos anteriores se tratan realmente de soluciones tipo ondas viajeras periódicas del sistema (1). Para esto, ejecutamos el algoritmo numérico introducido en Muñoz [18] para resolver el sistema (1) usando los perfiles (ζ_0, u_0) dados en (3.5), (3.6) y (3.7) como datos iniciales. Comparando los resultados para diferentes tiempos t del algoritmo utilizado en [18] con los hallados aquí respectivamente trasladados, se observó que las aproximaciones a soluciones expuestas en las Figuras 3.1, 3.2, 3.4 y 3.3 se propagan sin cambios en su forma y con la velocidad esperada.

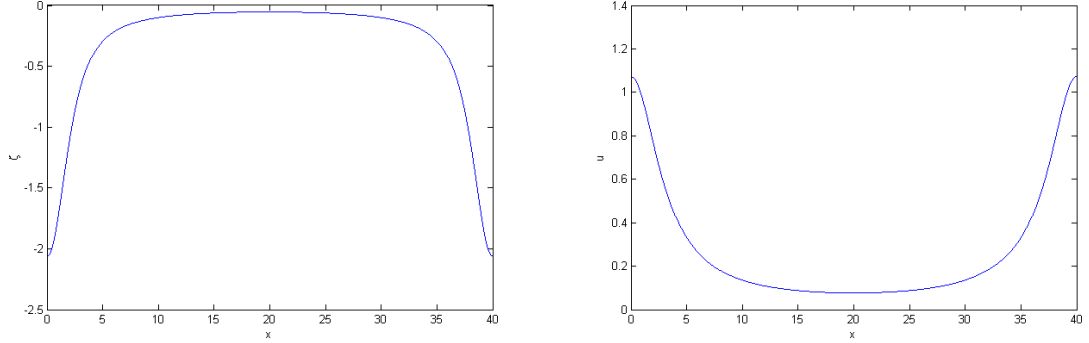


Figura 3.3: Soluciones tipo ondas viajeras periódicas computadas por 10 iteraciones del algoritmo, 2^{10} puntos de colocación, semiperiodo $l = 20$ y perfil de onda (3.6).

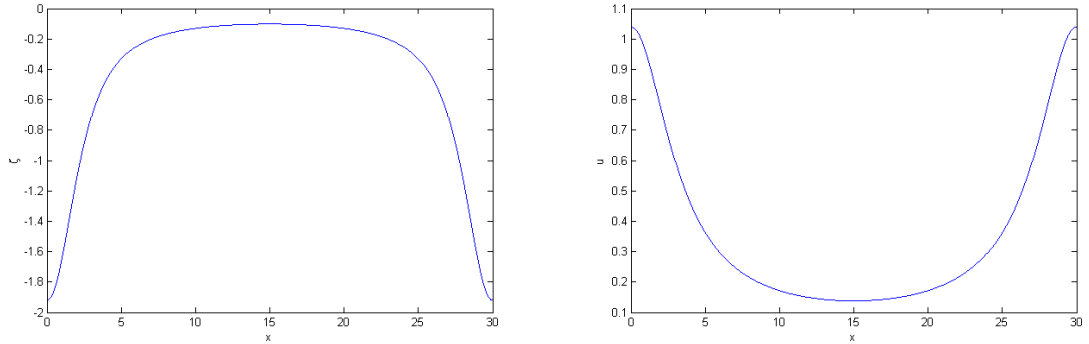


Figura 3.4: Soluciones tipo ondas viajeras periódicas computadas por 7 iteraciones del algoritmo, 2^{10} puntos de colocación, semiperiodo $l = 15$ y perfil de onda (3.7).

A continuación, consideramos los perfiles de onda:

$$\zeta_0(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad u_0(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (3.8)$$

$$\zeta_0(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad u_0(x) = -2\sqrt{\rho} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (3.9)$$

Para el perfil de onda (3.8), el experimento se realizó con los parámetros $\alpha = \epsilon = 1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$ y la velocidad de onda $c = -2$. Mientras que para (3.9) se tomaron los parámetros $\alpha = \epsilon = 1$, $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 5$ y velocidad de onda $c = 2$. En ambos experimentos se tomó el semiperiodo $l = 10$ y el dominio computacional $[0, 20]$. El método de Newton converge en siete y 19 iteraciones y los resultados son presentados en las Figuras 3.5 y 3.6, respectivamente.

Por último, para los experimentos restantes tomamos los parámetros $\alpha = \epsilon = 1$, $\rho_1 = 2$,

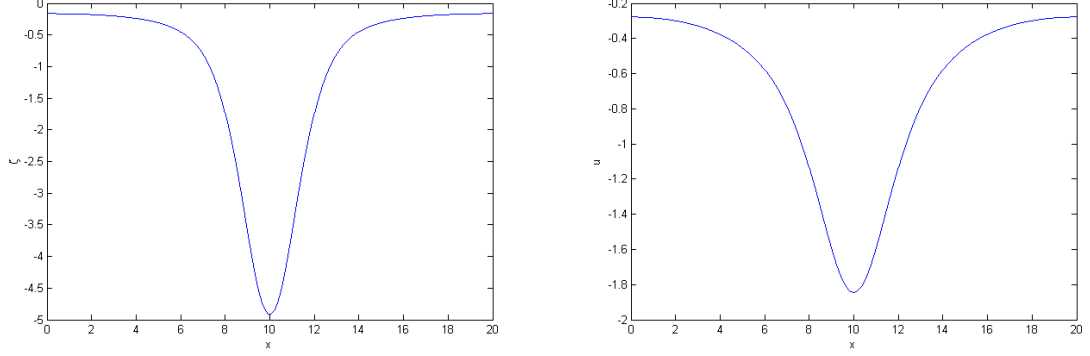


Figura 3.5: Soluciones tipo ondas viajeras periódicas computadas por 7 iteraciones del algoritmo, 2^{10} puntos de colocación, semiperiodo $l = 10$ y perfil de onda (3.8).

$\rho_2 = 5$, el semiperiodo $l = 15$ y por tanto, el dominio computacional $[0, 30]$. Tomamos las velocidades de onda $c = -2$, $c = 2$, $c = 3$ y los perfiles de onda dados en (3.10), (3.11), (3.12). Los resultados se muestran en las Figuras 3.7, 3.8 y 3.9, respectivamente.

$$\zeta_0(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad u_0(x) = 2\sqrt{\rho} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (3.10)$$

$$\zeta_0(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad u_0(x) = -2 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (3.11)$$

$$\zeta_0(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad u_0(x) = -2\sqrt{\rho} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (3.12)$$

Finalmente, en los experimentos descritos anteriormente, las velocidades de onda de las aproximaciones a las soluciones tipo ondas viajeras periódicas la velocidad de onda está en el rango $|c| > \sqrt{\rho} = \sqrt{\rho_2/\rho_1 - 1}$, como estaba estimado en el resultado teórico expuesto en el Capítulo 2.

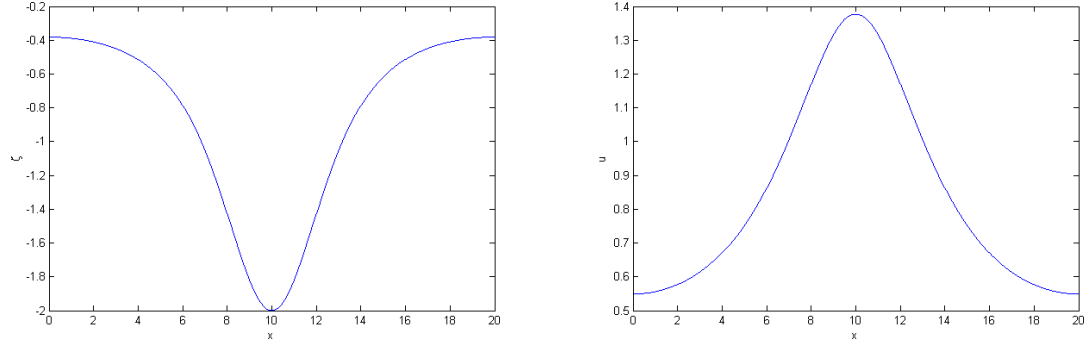


Figura 3.6: Soluciones tipo ondas viajeras periódicas computadas por 19 iteraciones del algoritmo, 2^{10} puntos de colocación, semiperiodo $l = 10$ y perfil de onda (3.9).

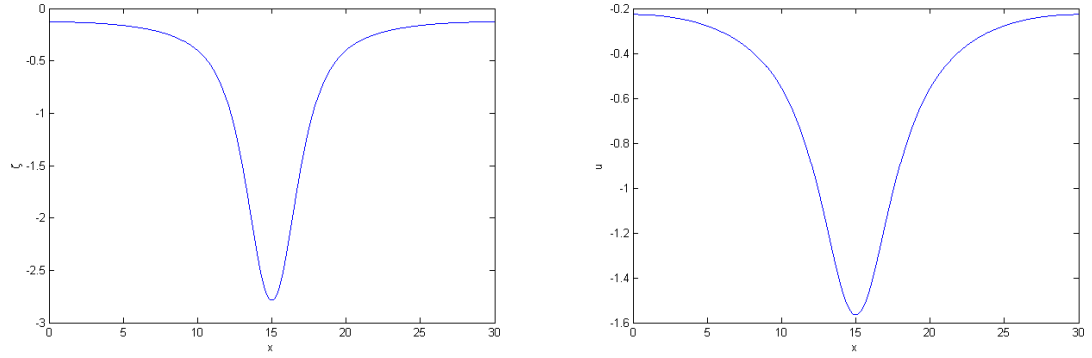


Figura 3.7: Soluciones tipo ondas viajeras periódicas computadas por 9 iteraciones del algoritmo, 2^{10} puntos de colocación, semiperiodo $l = 15$ y perfil de onda (3.10).

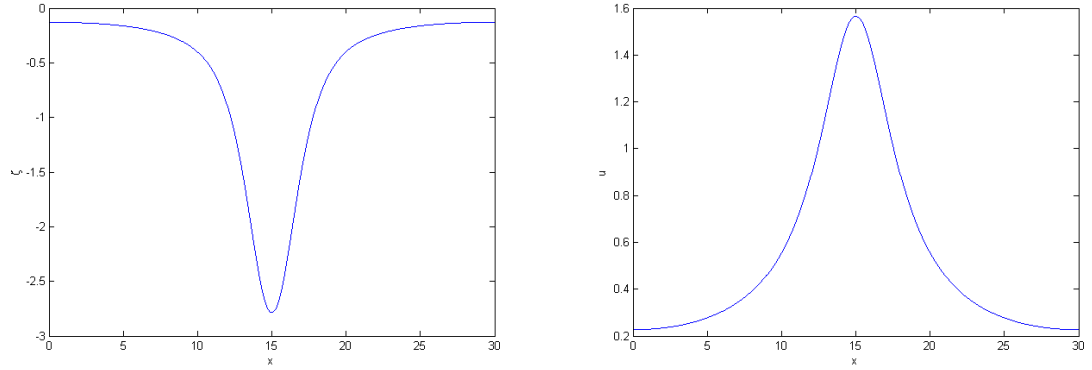


Figura 3.8: Soluciones tipo ondas viajeras periódicas computadas por 12 iteraciones del algoritmo, 2^{10} puntos de colocación, semiperiodo $l = 15$ y perfil de onda (3.11).

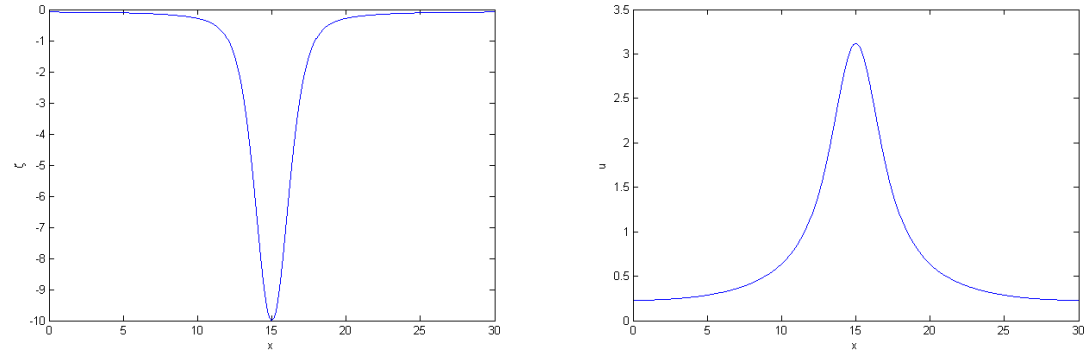


Figura 3.9: Soluciones tipo ondas viajeras periódicas computadas por 10 iteraciones del algoritmo, 2^{10} puntos de colocación, semiperiodo $l = 15$ y perfil de onda (3.12).

Conclusiones

- Usando la teoría de los operadores positivos en un cono en espacios de Banach [15, 16] hemos establecido la existencia de soluciones del tipo ondas viajeras periódicas de periodo $2l$ del sistema Benjamin-Ono Regularizado (1) para una velocidad satisfaciendo $|c| > \sqrt{\rho}$ y bajo la condición de que el periodo $2l$ sea lo suficientemente grande. Adaptamos esta técnica usando las ideas en [2] y en [4] para el caso de ecuaciones dispersivas escalares.
- Ilustramos la geometría de las soluciones tipo ondas viajeras periódicas del sistema (1) aproximándolas numéricamente. Para lograr esta aproximación numérica involucramos el método de Newton junto con una discretización espectral de la variable espacial.

Bibliografía

- [1] BENJAMIN, T. Internal waves of permanent form in fluids of great depth. *J. Fluid Mech.* 29, 3 (1967), 559–592.
- [2] BENJAMIN, T., BONA, J., AND BOSE, D. Solitary-wave solutions of nonlinear problems. *Phil. Trans. of the Royal Society of London, Series A* 331, 1617 (1990), 195–244.
- [3] CARDENAS, P., MENDOZA, J., AND GOMÉZ, J. *Int. a los métodos topológicos y sus aplicaciones*. Universidad tecnológica de Pereira, 2009.
- [4] CHEN, H. Existence of periodic travelling-wave solutions of nonlinear, dispersive wave equations. *Nonlinearity* 17, 6 (2004), 2041–2056.
- [5] CHO, Y., AND CHEN, Y. *Topological degree theory and applications*. Mathematical Analysis and Applications. Taylor and Francis, Hoboken, NJ, 2006.
- [6] CONWAY, J. *Functions of one complex variable I*. Functions of one complex variable / John B. Conway. Springer, 1978.
- [7] D.J. BENNEY AND J.C. LUKE. Interactions of permanent waves of finite amplitude. *J. Math, Phys.* 43 (1964), 309–313.
- [8] D.J. KORTEWEG AND G. DE VRIES. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.* 39 (1895), 422–443.
- [9] E. ZEIDLER. *Nonlinear functional analysis and its applications*, 1 ed., vol. 1. Springer-Verlag, 1986.
- [10] GRANAS, A. The Leray-Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANRs. *Bull. Soc. math.* 100 (1992), 209–228.
- [11] I.J. IORIO, R. I., AND DE M, I. *Fourier analysis and partial differential equations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2001.
- [12] J. DUOANDIKOETXEA. *Fourier analysis*, 1 ed., vol. 29. Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2000.

- [13] J. T. SCHWARTZ. *Nonlinear functional analysis*. New York: Gordon and Breach, 1969.
- [14] K. DEIMLING. *Nonlinear functional analysis*. Dover Publications, 2010.
- [15] M.A. KRASNOSEL'SKII. *Positive solutions of operator equations*. Groningen: P.Noordhoff Ltd, 1964.
- [16] M.A. KRASNOSEL'SKII. *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*. Oxford-London-New York-Paris: Pergamon Press, 1964.
- [17] MUÑOZ, J. Existence and computation of periodic travelling-wave solutions of a dispersive system. *Commun. Math. Sci.* 10, 3 (2012), 917–944.
- [18] MUÑOZ, J. Existence and numerical approximation of solutions of an improved internal wave model. *Math. Model. Anal.* 19, 3 (2014), 309–333.
- [19] PIPICANO, F., AND MUÑOZ, J. Existence of periodic travelling wave solutions for a regularized Benjamin-Ono system. *Journal of Differential Equations* 259, 12 (2015), 7503 – 7528.
- [20] ZHANG, L. Decay of solutions of generalized Benjamin-Bona-Mahony equations. *Acta Mathematica Sinica* 10, 4 (1994), 428–438.